Analyse Convexe

Ensembles convexes

Définition. *A sous-espace affine si* $(1-t)x+ty \in A, \forall x, y \in A, \forall t \in \mathbb{R}$
A stable par combinaison affine :
$\forall x_1, \dots, x_m \in A, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_m$ *tels que* $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ *on a* $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in A$

Définition. *A convexe : pareil avec $t \in [0,1]$ et $\forall i, \lambda_i > 0$*

Lemme. *Soient $a, b > 0$ et K convexe. Alors* $aK + bK = (a+b)K$

Définition. *Soit F sous-espace affine, $x \in F$. On à* $\dim(F) = \dim(F-x)$

Définition. *On appelle simplexe de dimension n l'enveloppe convexe de $n+1$ points.*

Lemme. *Soit K un convexe de dimension n alors in contient un simplexe de dimension $n+1$*

Théorème de Carathéodory et de Helly

Théorème (Théorème de Carathéodory)**.** *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Toute combinaison convexe d'éléments de A peut s'écrire comme combinaison d'au plus $n+1$ éléments de A.*

Théorème (Théorème de Radon)**.** *Soit $S \subset \mathbb{R}^n, |S| \geq n+2$, il existe A et B verifiant :*
$A \cap B = \emptyset$ *et* $\operatorname{conv}(A) \cap \operatorname{conv}(B) \neq \emptyset$

Théorème (Théorème de Helly)**.** *Si une famille de sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$ est telle que toute sous-famille de cardinal $n+1$ est d'intersection non vide alors la famille entière est d'intersection non vide.*

Propriétés topologiques des convexes

Proposition. *Si K convexe alors $\mathring{K}$ et $\bar{K}$ sont convexes.*

Définition. $\operatorname{ri}(K) = \{x \in U, U \textit{ouvert et } U \cap \operatorname{aff}(K) \subset K\}$

Lemme. *L'interieur relatif d'un convexe est convexe.*

Proposition. *Soit $K \neq \emptyset$ convexe de $\mathbb{R}^n$, alors $\operatorname{ri}(K) \neq \emptyset$*

Définition. *Soit K convexe. On appelle jauge de K :* $j(x) = \inf\{s > 0; x \in sK\}$

Proposition. *Soit K convexe contenant 0 et j sa jauge.*

1. $j(tx) = tj(x); \forall t \geq 0$
2. $j(x+y) \leq j(x) + j(y)$

Proposition. *Soit K convexe tel que $0 \in \mathring{K}$ et j sa jauge. Alors $j(x) < \infty$ et j continue sur E.*

Proposition. *Soit K convexe contenant 0.*
$\mathring{K} \subset \{j < 1\} \subset K \subset \{j \leq 1\} \subset \bar{K}$

Proposition. *Si K convexe, $\mathring{K} \neq \emptyset$, $-K = K$ et K ne contient pas de demi-droite alors j est une norme. Et $\bar{K}$ la boule unité de j.*

Fonctions convexes

Proposition.

1. *f convexe $\implies$* $\operatorname{dom}(f) = \{x \in K; f(x) < \infty\}$ *convexe*
2. *f convexe $\Leftrightarrow$ $\operatorname{epi}(f) = \{(x,t) \in \operatorname{dom}(f) \times \mathbb{R}; f(x) \geq t\}$ convexe*

Lemme. *Si f convexe majorée au voisinage de $x \in E$ alors f continue en x.*

Lemme. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe. Alors f localement bornée sur son domaine.*

Corollaire. *En dimension finie, une fonction convexe est continue dans l'intérieur de son domaine.*

Théorème de Hahn-Banach

Théorème (Théorème de Hahn-Banach)**.** *Soit E un espace vectoriel, $j : E \to \mathbb{R}$ une fonction 1-homogène et sous-additive. Soit F un s.e.v de E et $\phi : F \to \mathbb{R}$ telle que :*
$\phi(x) \leq j(x), \forall x \in F$ alors $\exists \psi : F \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\psi(x) = \phi(x), \forall x \in F$$
$$\psi(x) \leq \phi(x), \forall x \in E$$

Corollaire. *Soit E un espace vectoriel normé, F un sous-espace et ϕ une forme linéaire continue sur F. Alors ϕ s'étend en une forme linéaire continue sur E de même norme que ϕ.*

Corollaire. *Soit E e.v.n, $x \in E$ fixé, il existe $\phi \in E^\star$ de norme 1 telle que $\phi(x) = \|x\|$*

Théorème. *Soit E un espace vectoriel topologique, A,B deux ensembles convexes disjoints.*

1. *Si A ouvert, $\exists \phi \in E^\star$ telle que* $\phi(x) < \phi(y), \forall x \in A, \forall y \in B$
2. *Si E localement convexe, A compact, B fermé, alors $\exists \phi \in E^\star$ et $\epsilon > 0$ tels que* $\phi(x) + \epsilon < \phi(y), \forall x \in A, \forall y \in B$

Corollaire (Hyperplan d'appui)**.** *Soit C un convexe fermé d'intérieur non vide et $x \in \delta C$. Alors C admet un hyperplan d'appui en x : $\exists \phi \in E^\star$ non nulle telle que $\phi(y) \leq \phi(x), \forall y \in C$*

Polarité

Définition. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On appelle polaire de A,* $A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle \leq 1, \forall y \in A\}$

Lemme. *L'ensemble A° est convexe, fermé et contient 0.*

Théorème. *$A = A^{\circ\circ} \Leftrightarrow A$ est convexe, fermé et contient 0.*

Définition. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On appelle fonction d'appui de A :* $h_K(y) = \sup_{x \in A} \langle x, y \rangle$

Lemme. $0 \in A \implies h_A = j_{A^\circ}$

Proposition. *Soit K un convexe compact d'intérieur non vide (K corps convexe) tel que $K = -K$. Soit j_K sa jauge. Alors $E = (\mathbb{R}^n, j_K)$ espace vectoriel normé dont la boule unité est K et $E^\star = (\mathbb{R}^n, j_{K^\circ})$ i.e la boule unité de $E^\star$ est le polaire de K.*

Transformée de Legendre-Fenchel

Définition. *f est dite semi-continue inférieurement si pour toute suite convergente (x_n) de $\mathbb{R}^n$ on :* $\liminf f(x_n) \geq f(\lim x_n)$

Lemme. *f s.c.i $\Leftrightarrow \operatorname{epi}(f)$ sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$*

Lemme. *Un $\sup$ de fonctions s.c.i est s.c.i*

Définition (Transformée de Legendre-Fenchel)**.** *Soit f une fonction propre.*
$f^\star : y \in \mathbb{R}^n \to \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, y \rangle - f(x)\}$

Lemme. *$f^\star$ est convexe et s.c.i*

Définition. *Soit f une fonction propre et $x \in \operatorname{dom}(f)$. On dit que y est sous-gradient de f en x, $y \in \delta f(x)$ si :*
$\langle x', y \rangle - f(x') \leq \langle x, y \rangle - f(x), \forall x' \in \mathbb{R}^n$
i.e $f(x) + f^\star(y) = \langle x, y \rangle$

Théorème. *f convexe propre, $x \in \operatorname{ri}(\operatorname{dom}(f)) \Rightarrow \delta f(x) \neq \emptyset$*

Corollaire. *f fonction convexe propre $\Rightarrow f$ minorée par une fonction affine.*

Théorème. *Soit f fonction propre, minorée par une fonction affine. Alors* $\operatorname{epi}(f^{\star\star}) = \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{epi}(f))}$

Corollaire. *Soit f fonction propre.*
$f = f^{\star\star} \Leftrightarrow f$ convexe et s.c.i.

Proposition. *Si f est convexe s.c.i, l'image du domaine de f par δf contient l'interieur du domaine de $f^{\star\star}$ i.e.* $\operatorname{dom}(f^{\star\star}) \subset \delta f(\operatorname{dom} f)$.

Convexité et différentiabilité

Définition. *Soit f fonction définie au voisinage de x et soit $v \in \mathbb{R}^n$. On dit que f admet une dérivée directionnelle en s dans la direction v, notée $f'(x,v)$ si :*
$f'(x,v) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$

Définition. *f Gâteaux-differentiable en s si elle admet des dérivées dans toutes les directions et si il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall v, f'(x,v) = \langle \nabla f(x), v\rangle$ et on pose $f'(x) = y$.*

Lemme. *Soit f une fonction convexe et $x \in \mathring{\mathrm{dom}}(f)$. Alors pour toute direction v, la dérivée directionnelle $f'(x,v)$ existe, et il existe $y \in \mathrm{d}f(x)$ telle que $f'(x,v) = \langle y, v\rangle$.*

Proposition. *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction Gâteaux-différentiable sur U. Il y a équivalence entre :*

1. *f est convexe sur U*
2. *$f(y) \geq f(x) + \langle f'(x), y-x\rangle, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$*
3. *$\langle f'(y) - f'(x), y-x\rangle \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$*

Corollaire. *Si f est deux fois différentiable sur U et si $D^2 f(x) \geq 0$ en tout point de U alors f est convexe.*

Lemme. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et soit x dans l'intérieur du domaine de f. Si f est Gâteaux-différentiable en x alors f est différentiable et $f'(x) = \nabla f(x)$*

Proposition. *Soit f convexe et soit x dans l'interieur du domaine de f. Alors f est différentiable en x ssi $\partial f(x)$ est un singleton et on a :*

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$$

Théorème de Krein-Milman

Définition. *Soit K un ensemble convexe de E. On dit que $F \subset K$ est une face de K si F est convexe et si :*

$$\frac{x+y}{2} \in F \implies x, y \in F \, \forall x, y \in K$$

Lemme. *Soit K un convexe et soit ϕ une forme linéaire atteignant son maximum sur K. Alors l'ensemble*

$$F = \left\{ x \in K; \phi(k) = \max_K \phi \right\}$$

est une face de K.

Proposition. *Soit K un convexe compact non vide, alors K possède au moins un point extrémal.*

Théorème (Krein-Milman)**.** *Soit K un ensemble convexe compact de E alors K est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.*

Optimisation Convexe

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & f(x) \text{ convexe} \\ \text{sous contraintes} & g_i(x) \leq 0, \ \forall i \leq k \text{ convexe} \\ & h_i(x) = 0 \, \forall i \leq l \text{ affines.} \end{array}$$

Définition. *Le Lagrangien associé au problème $\mathcal{P}$ est la fonction :*

$$L : (x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to f(x) + \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^l \mu_i h_i(x)$$

$$\lambda_i \geq 0$$

Proposition. *Soient $(x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$, x solution de $\mathcal{P}$ et (λ, μ) vecteur KKT ssi x vérifie les contraintes et les conditions :*

$$\lambda_i g_i(x) = 0, \ \forall i \leq k$$

$$0 \in \partial \left(f + \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^l \mu_i h_i(x) \right)$$

Théorème. *On suppose que la valeur du problème n'est pas $-\infty$ et que la condition dite de Slater est vérifiée : $\exists x \in \mathrm{ri}(C)$ vérifiant les contraintes et vérifiant de plus :*

$$g_i(x) < 0$$

pour tout i tel que la fonction g_i ne soit pas affine sur C. Alors le problème admet un vecteur KKT.

Lemme. *Soit K convexe et C un cône convexe engendré par un nombre fini de vecteurs. Si C ne rencontre pas l'intérieur relatif de K, il existe $y \in C^*$*

$$\langle x, y\rangle \leq 0, \ \forall x \in K$$

et tel que l'inégalité soit stricte pour au moins un élément de K.

Corollaire. *On suppose que le problème vérifie les hypothèses du théorème précédent. Alors x est solution de $(\mathcal{P})$ ssi $\exists(\lambda, \mu)$ tel que x vérifie les contraintes et les conditions de KKT.*

Théorème de John

On dit que $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ est un ellipsoïde si $\exists A$ inversible et u tels que :

$$\mathcal{E} = A^{-1}(B_2^n) + u$$

Lemme. *La fonction*

$$A \in S_n \to \begin{cases} -\log\det(A) & \text{si } A \in S_n^{++} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème. *Soit K un convexe compact d'intérieur non vide. Il existe un unique ellipsoïde contenu dans K de volume maximal, appelé ellipsoïde de John de K.*

Théorème. *Un convexe compact d'intérieur non vide K est en position de John ssi K est contenu dans B_2^n et si il existe r entier, $c_1, \ldots, c_r$ des réels positifs et $x_1, \ldots, x_r$ appartenant à $\partial K \cap S^{n-1}$ tels que :*

$$\sum_{i=1}^r c_i x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^r c_i x_i (x_i)^\top = \mathrm{id}$$

Corollaire. *Soit $\mathcal{E}$ l'ellipsoïde de John de K et u son centre alors*

$$\frac{1}{n}(\mathcal{E} - u) + u \subset K$$

Si K est symétrique par rapport à u on a même

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathcal{E} - u) + u \subset K$$

Espaces en dualité et programmation linéaire

Définition. *On dit que E et F espaces vectoriels sont en dualité s'il existe une application*

$$\langle ;\dot{} \rangle : E \times F \to \mathbb{R}$$

qui soit une forme bilinéaire non dégénérée.

Définition. *Soit E,F deux espaces en dualité. Soit $\sigma(E,F)$ la plus petite topologie sur E telle que pour tout y l'application $x \to \langle x, y\rangle$ soit continue. Alors E muni de cette topologie est un espace vectoriel topologique localement convexe.*

Théorème. *Soit ϕ une forme linéaire sur E. Alors ϕ est continue pour la topologie $\sigma(E,F)$ ssi il existe $y \in E$ tel que*

$$\phi(x) = \langle x, y\rangle$$

Définition. *Soit C un cône de E. On pose*

$$C^* = \{y \in F; \langle x, y\rangle \geq 0, \forall x \in C\}$$

C'est un cône férmé de F appelé cône dual. De même si D est un cône de F, le cône dual de D est :

$$D_* = \{x \in E; \langle x, y\rangle \geq 0, \forall y \in D\}$$

Théorème. *Soit $C \subset E$. On a $C = (C^*)_*$ ssi C est un cône fermé. Plus généralement $(C^*)_*$ est l'enveloppe conique fermée de C.*

Théorème. *Si l'ensemble des x satisfaisant les contraintes de :*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimiser} & \langle x, y\rangle \\ \textit{sous contraintes} & Ax = a \\ & x \in C \textit{ cône.} \end{array}$$

est non vide et si le cône $D = \{(Ax, \langle x, y\rangle); x \in C\}$ est fermé dans $E_1 \times \mathbb{R}$ muni de la topologie produit alors $\alpha = \alpha'$. Si de plus $\alpha > -\infty$ le problème admet une solution.

Théorème (Théorème de Kontorovitch)**.** *Les deux problèmes ont la même valeur :*

$$\inf\left\{ \int c \, \mathrm{d}\pi; \pi_1 = \mu, \pi_2 = \nu \right\}$$

$$\cdots = \sup\left\{ \int f \, \mathrm{d}\mu + \int g \, \mathrm{d}\nu, f(x) + g(y) \leq c(x,y) \right\}$$

---

http ://ausset.me/cheatsheets