Mouvement Brownien

Evaluation d'actifs

Modèle de marché

Définition. $S^0_{t_{k+1}} = S^0_{t_k} e^{r(t_{k+1}-t_k)}$

Définition. $V_{t_k} = \sum_{i=0}^d \theta^i_{t_k} S^i_{t_k} = \langle \theta_{t_k}, S_{t_k} \rangle$

Définition. $\left(\theta \bullet \Delta\widetilde{S}\right)_{t_0} = \sum_{m=1}^k \langle \theta_{t_m}, \Delta\widetilde{S}_{t_m} \rangle$

Définition (Stratégie autofinancée). $\widetilde{V}_{t_k} = \widetilde{V}_{t_0} + \left(\theta \bullet \Delta\widetilde{S}\right)_{t_k}$

Définition (Déf équivalente). $\langle \theta_{t_{k-1}}, S_{t_k-1} \rangle = \langle \theta_{t_k-1}, S_{t_k-1} \rangle$

Proposition (Call-Put).
$C_t(S,T,K) - P_t(S,T,K) = S - Ke^{-r(T-t)}$

Théorème. *$\widetilde{S}$ une $\mathbb{Q}$-martingale $\implies$ A.O.A*

Réplication d'actifs

Proposition (Prix d'un actif réplicable).
$p^G_{t_k} = e^{rt_k}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Ge^{-rT} \mid \mathcal{F}_{t_k}]$

Théorème (Risque neutre arbre binomial). *Soit $t_k = k\Delta t$*

1. $d < e^{r\Delta t} < u$
2. $\mathbb{Q}(Y_1 = u) = q$ *et* $\mathbb{Q}(Y_1 = d) = 1-q$
3. $q = \frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}$

Théorème (Evaluation des actifs indép du chemin). *Soit $G = \phi(S^1_T)$*

1. $p^G_{t_k}(X) = e^{-r\Delta t}[qp^G_{t_{k+1}}(Xu) + (1-q)p^G_{t_{k+1}}(Xd)]$
2. $v = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}\phi(S^1_T)]$
3. $\theta^1_{t_k} = \frac{p^G_{t_k}(uS^1_{t_{k-1}}) - p^G_{t_k}(dS^1_{t_{k-1}})}{uS^1_{t_{k-1}} - dS^1_{t_{k-1}}}$

Mouvement Brownien et Itô

Processus Stochastiques

Définition. *X mesurable si $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_d$ on a* $\{(t,\omega) : X^1_t(\omega) \le \alpha^1, \dots, X^d_t(\omega) \le \alpha^d\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}$

Proposition. *Si $X = (X^1, \dots, X^N)$ est un vecteur gaussien alors $\Phi_X(\xi) = e^{i\langle \xi, \mathbb{E}[X]\rangle - \frac{1}{2}\langle \xi, K_X\xi\rangle}$ ou K_X est la matrice de covariance*

Martingales en temps continu

Proposition. *Soit M une sous-martingale. $F = \{s_1 \le \dots \le s_N\}$ ensemble fini*
$\lambda\mathbb{P}(\max_{s\in F} M_s \ge \lambda) \le \mathbb{E}[|M_{s_N}|\mathbb{1}_{\{\max_{s\in F} M_s \ge \lambda\}}]$

Proposition (Inégalité maximale de Doob). *Soit M une sous-martingale à trajectoires continues*
$\lambda\mathbb{P}(\max_{s\in[\tau,T]} M_s \ge \lambda) \le \mathbb{E}[|M_{s_N}|\mathbb{1}_{\{\max_{s\in[\tau,T]} M_s \ge \lambda\}}]$

Proposition (Inégalité Doob II). *Soit M une sous-martingale à trajectoires continues, $p > 1$ et $\lambda > 0$*
$\mathbb{E}[(\sup_{s\in[\tau,T]} |M_s|)^p] \le (\frac{p}{p-1})^p \mathbb{E}[|M_s|^p]$

Mouvement Brownien

Définition. *B un mouvement brownien si*

1. *B à trajectoires continues*
2. *$\forall 0 \le s \le t$, $B_t - B_s$ indépendant de $\mathcal{F}_s$*
3. *$\forall 0 \le s \le t$, $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$*

Proposition. *B mouvement brownien $\Leftrightarrow$ B processus gaussien continu, $e_B(t) = 0$ et $K_B(s,t) = \min(s,t)$*

Proposition (Théorème de Levy). *Si M_t martingale continue avec $M_0 = 0$ telle que $M_t^2 - t$ martingale alors M_t mouvement brownien.*

Proposition. *Si B mouvement brownien, $T \ge 0$, $\lambda \ge 0$ alors :*

1. $\{-B_t\}$
2. $\{B_{T+t} - B_T\}$
3. $\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}B_{\lambda t}\}$
4. $\{tB_{1/t}\}$

sont des mouvements browniens.

Proposition. $\forall \epsilon > 0 \lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t^{\frac{1}{2}+\epsilon}} = 0$ *p.s.*

Proposition. $\forall T \ge 0, x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(\exists s \ge T, B_s = x) = 1$

Proposition. $\mathbb{P}(\inf_{t\ge0} B_t = -\infty) = 1$ *et* $\mathbb{P}(\sup_{t\ge0} B_t = \infty) = 1$

Définition (Variation d'ordre p). *Soit $\Delta = \{t_0 = 0 \le t_1 \le \dots \le t_n = t\}$ une subdivision de $[0,t]$, $|\Delta| = \sup_i |t_i - t_{i-1}|$, $p > 1$*
$V^{(p)}_t(g,\Delta) = \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})|^p$
$g : [0,T] \to \mathbb{R}$ à variation totale d'ordre p si $\forall\, 0 \le t \le T : \sup_\Delta V(p)_t(g,\Delta) < \infty$
Si $\lim_{t\to\infty} V^{(p)}_t(g) < \infty$ avec $V^{(p)}_t(g) = \limsup_{|\Delta|\to0} V^{(p)}_t(g,\Delta)$ on dit que g de variation d'ordre p bornée.

Proposition. $\lim_{|\Delta|\to0} \mathbb{E}[|\, V^{(2)}_t(B,\Delta) - t\,|^2] = 0$
C'est à dire : $V^{(2)}_t(B,\Delta) \xrightarrow[\Delta\to0]{L^2} t$

Proposition. *Les trajectoires de B sont presque surement à variation totale infinie sur $[0,t]$*

Définition. *Un processus est dit à variation quadratique finie si il existe un processus fini $\langle X\rangle_t$ tel que $\Delta^n, |\,\Delta^n\,| \to 0$*
$\lim_{n\to\infty} V^{(2)}_t(X,\Delta^n) = \langle X\rangle_t$ *p.s*
On note : $\langle X,Y\rangle_t = \frac{\langle X+Y\rangle_t - \langle X\rangle_t - \langle Y\rangle_t}{2}$

Proposition (Théorème de Levy de caractérisation). *Soit M_t une martingale continue avec $M_0 = 0$ telle que $\langle X\rangle_t = t$ alors M_t est un mouvement brownien.*

Intégrale d'Itô

Définition (Processus élémentaire). *$H \in \mathcal{E}$ est un processus élémentaire si $H_t(\omega) = \sum_{i=1}^n H_i(\omega)\mathbb{1}_{]t_{i-1},t_i]}$ avec $\{t_0 \le \dots \le t_n = T\}$ subdivision, H_i est $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurable et $\sup_i |\, H_i\,| < \infty$*

Définition. $\int_0^t H_u \,\mathrm{d}B_u = \sum_{i=1}^n H_i(B_{t\wedge t_i} - B_{t\wedge t_{i-1}})$ *est :*

1. *$\mathbb{F}$-adapté et à trajectoires continues*
2. *Une $\mathbb{F}$-martingale qui démarre à zero.*
3. *Une isométrie : $\mathbb{E}[(\int_0^t H_u \,\mathrm{d}B_u)^2] = \mathbb{E}[\int_0^t H_u^2 \,\mathrm{d}u]$*
4. $\mathbb{E}[(\int_0^t H_u \,\mathrm{d}B_u)(\int_0^\tau K_u \,\mathrm{d}B_u) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(\int_0^{\min(t,\tau)} H_u K_u \,\mathrm{d}u \mid \mathcal{F}_s]$
5. *$\{(\int_0^t H_u \,\mathrm{d}B_u)^2 - (\int_0^t H_u^2 \,\mathrm{d}u)\}$ est une $\mathbb{F}$-martingale démarrant en zéro.*

Proposition (Variation quadratique I). *Soit $H \in \mathcal{E}$*

$$\langle \int_0^t H_u \,\mathrm{d}B_u \rangle = \int_0^t H_u^2 \,\mathrm{d}u$$

$$\langle \int_0^t H_u \,\mathrm{d}B_u, \int_0^t K_u \,\mathrm{d}B_u \rangle = \int_0^t H_u K_u \,\mathrm{d}u$$

Intégration des processus de $\mathcal{L}^2$

$\mathcal{L}^2 := \left\{\{H_t, 0 \le t \le T\}\ \mathbb{F}\text{-adapté } \mid \mathbb{E}\left[\int_0^T H_u^2 \,\mathrm{d}u\right] < \infty\right\}$

Proposition. *$H \to \mathbb{E}\left[\int_0^T H_u^2 \,\mathrm{d}u\right]$ définit une norme sur $\mathcal{L}^2$*

Lemme. *$\mathcal{E}$ dense dans $\mathcal{L}^2$ pour $\|.\|_{\mathcal{L}^2}$*

Théorème (Intégrale stochastique II). *Il existe une unique application linéaire $\mathcal{I}$ qui prolonge l'intégrale d'Itô de $\mathcal{E}$ et vérifie la propriété d'isométrie :*

$$\mathbb{E}[\mathcal{I}[H]_t^2] = \mathbb{E}[\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}s]$$

Proposition (Intégrale de Wiener). *Soit $f \in C^0$. Le processus $\{\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}B_s\}_t$ vérifie :*

$$\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}B_s \sim \mathcal{N}(0, \int_0^t f^2(s)\,\mathrm{d}s)$$

Intégration des processus de $\mathcal{L}$

$\mathcal{L} := \left\{ \{H_t\}_t \ \mathbb{F}\text{-adapté} \mid \int_0^T H_u^2 \,\mathrm{d}u < \infty \text{p.s.} \right\}$

Théorème (Intégrale stochastique III). *Il existe une unique application linéaire $\mathcal{J}$ qui coincide avec l'intégrale stochastique sur $\mathcal{E}$ et vérifie la propriété de continuité : si $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de processus simples telles que $\int_0^T (H_u^n)^2\,\mathrm{d}u \to 0$ en probabilité alors : $\sup_{t\in[0,T]}(\mathcal{J}(H^n)_t) \to 0$ en probabilité.*

Calcul d'Itô

Définition (Processus d'Itô). *Un processus X est appelé processus d'Itô si il s'écrit de la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_u\,\mathrm{d}u + \int_0^t H_u\,\mathrm{d}B_u$$

Avec $X_0 \hat{\in} \mathcal{F}_0$, α et H deux processus $\mathbb{F}$-adaptés tels que : $\int_0^T |\alpha_u|\,\mathrm{d}u < \infty$ p.s. et $\int_0^T |H_u|^2\,\mathrm{d}u < \infty$ p.s.

Définition. *Soit $\mathcal{I}^2$ les processus d'Itô tels que : $\mathbb{E}\left[\int_0^T |\alpha_u|\,\mathrm{d}u\right] < \infty$ et $\mathbb{E}\left[\int_0^T |H_u|^2\,\mathrm{d}u\right] < \infty$*

Proposition. *Soit X un processus d'Itô de $\mathcal{I}^2$ alors sa décomposition est unique.*

Proposition. *Soit $X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_u\,\mathrm{d}u + \int_0^t H_u\,\mathrm{d}B_u$ un processus d'Itô de $\mathcal{I}^2$ alors X une martingale si et seulement si $\alpha = 0$ p.s.*

Proposition (Variation quadratique d'un processus d'Itô). *Soient $X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_u^X\,\mathrm{d}u + \int_0^t H_u^X\,\mathrm{d}B_u$ et $Y_t = Y_0 + \int_0^t \alpha_u^Y\,\mathrm{d}u + \int_0^t H_u^Y\,\mathrm{d}B_u$ dans $\mathcal{I}^2$*

$$\langle X\rangle_t = \int_0^t |H_u^X|^2\,\mathrm{d}u$$

$$\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t H_u^X H_u^Y\,\mathrm{d}u$$

Théorème (Formule d'Itô). *Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^{1,2}$. Soit $X \in \mathcal{I}$, $X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_u\,\mathrm{d}u + \int_0^t H_u\,\mathrm{d}B_u$. Alors $Y_t = f(t, X_t) \in \mathcal{I}$*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(u, X_u)\,\mathrm{d}u + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_u)\,\mathrm{d}X_u + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, X_u)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_u$$

Proposition (Intégration par parties). *Soient X et Y deux processus d'Itô. Alors :*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s\,\mathrm{d}Y_s + \int_0^t Y_s\,\mathrm{d}X_s + \int_0^t \mathrm{d}\langle X, Y\rangle_s$$

Itô multidimensionelle

Equations différentielles stochastiques

Théorème. *Soit $T > 0$ et $a(\cdot,\cdot)$, $b(\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables telles qu'il existe des constantes $C, L > 0$ satisfaisant :*

$$|a(t,x)| + |b(t,x)| \le C(1 + |x|), \forall x \in \mathbb{R}, t \in [0,T]$$

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \le L|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}, t \in [0,T]$$

Soit Z une variable aléatoire indépendante de la σ-algèbre $\mathcal{F}_\infty$ générée par tous les $B_s (s \ge 0)$ et telle que

$$\mathbb{E}[Z^2] < \infty$$

Alors l'équation différentielle stochastique

$$X_t = Z + \int_0^t a(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}B_s, t \in [0,T]$$

admet une unique solution X_t telle que :

1. *X_t est continue par rapport à t*
2. *X_t est adaptée à la filtration $\mathcal{F}_t^Z$ générée par $\mathcal{F}_t$ et Z*
3. *$X \in L^2([0,T])$:*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T X_t^2\right] < \infty$$

Représentation de martingales

Théorème. *Soit $(M_t)_{t\in[0,T]}$ une martingale par rapport à la filtration naturelle d'un mouvement Brownien B_t. Supposons que $M \in \mathcal{M}^2([0,T])$. Alors il existe un processus adapté $(H_t)_{t\in[0,T]}$ tel que*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s\,\mathrm{d}B_s$$

De plus $H \in \mathcal{L}^2([0,T])$

Proposition (Théorème de Girsanov élémentaire). *Soit $T > 0, T < \infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons la mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ définie sur (Ω, F) par*

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = Z_t^\lambda \text{ où } Z_t^\lambda = \exp\{-\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\}$$

Alors, le processus $\{B_t + \lambda t, t \in [0,T]\}$ est un $\mathbb{F}$-mouvement Brownien standard sur (Ω, F, Q).

Modèle de Black et Scholes

On suppose $S_t^0 = S_0^0 e^{rt}$ et $\mathrm{d}S_t = \mu\,\mathrm{d}S_t\,\mathrm{d}t + \sigma S_t\,\mathrm{d}B_t$. On note $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{S_t^0}$

Définition. *La condition d'autofinancement de la stratégie (α, θ) est $\mathrm{d}V_t = \alpha_t\,\mathrm{d}S_t^0 + \theta_t\,\mathrm{d}S_t$ ou encore $\mathrm{d}\tilde{V}_t = \theta_t\,\mathrm{d}\tilde{S}_t$. On appelle ensemble des portefeuilles admissibles :*

$$\mathcal{A} := \left\{ \theta\ \mathbb{F}\text{-adapté} : \mathbb{E}\left[\int_0^T |\theta_u \tilde{S}_u|^2\,\mathrm{d}u\right] < \infty \right\}$$

Proposition. *Notons $\lambda^\star := (\mu - r)/\sigma$ et considérons la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^\star$*

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}^\star}{\mathrm{d}\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}} := Z_t^{\lambda^\star} \text{ où } Z_t^{\lambda^\star} := \exp\left\{-\lambda^\star B_t - \frac{(\lambda^\star)^2}{2}t\right\}$$

Alors $\tilde{S}$ est une $\mathbb{F}$-martingale sur $\mathbb{Q}^\star$ et pour toute stratégie financière $(x, \theta) \in \mathcal{A}$ la valeur actualisée $\tilde{V}^{x,\theta}$ est une martingale.

Proposition (Formules importantes).

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t\,\mathrm{d}t + \sigma S_t\,\mathrm{d}B_t$$

$$\mathrm{d}\tilde{S}_t = (\mu - r)\tilde{S}_t\,\mathrm{d}t + \sigma\tilde{S}_t\,\mathrm{d}B_t$$

$$\mathrm{d}V_t = r\alpha_t S_t^0\,\mathrm{d}t + \theta_t S_t\,\mathrm{d}B_t$$

$$\mathrm{d}\tilde{V}_t = \theta_t\,\mathrm{d}\tilde{S}_t = \theta_t(\mu - r)\tilde{S}_t\,\mathrm{d}t + \sigma\theta_t\tilde{S}_t\,\mathrm{d}B_t\,\mathrm{d}B_t$$

$$\mathrm{d}B_t^\star = \mathrm{d}B_t + \lambda^\star\,\mathrm{d}t, \lambda^\star = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

$$\mathrm{d}S_t = rS_t\,\mathrm{d}t + \sigma S_t\,\mathrm{d}B_t^\star$$

$$\mathrm{d}S_t = \sigma\tilde{S}_t\,\mathrm{d}B_t^\star$$

$$\mathrm{d}\tilde{V}_t = \theta_t\,\mathrm{d}\tilde{S}_t = \theta_t\sigma\tilde{S}_t\,\mathrm{d}B_t^\star.$$

Evaluation d'options européennes et équation de B et S

Proposition (Evaluation par réplication). *Soit un actif contingent de payoff G. Supposons que $E^{\mathbb{Q}^\star}[G^2] < \infty$. Alors*

1. *l'actif G admet une stratégie de réplication (x^G, θ^G).*
2. *sous la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage A.O.A, son prix à la date t, noté p_t^G, est donné par :*

$$p_t^G = S_t^0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\star}\left[G/S_T^0 \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\star}\left[e^{-r(T-t)}G \mid \mathcal{F}_t\right]$$

Théorème (Equation de Black et Scholes). *Soit $v : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^{1,2}$ solution de l'EDP :*

$$\partial_t v(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx} v(t,x) = rx\partial_x v(t,x) = rv(t,x), \forall (t,x)$$

$$v(T,x) = \Phi(x)$$

Nous supposons de plus que $\partial_x v$ est telle que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |\partial_x v(t, S_t) S_t|^2\,\mathrm{d}t\right] < \infty$$

Alors $(v(0, S0), \{\partial_x v(t, St), 0 \le t \le T\}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$ est une stratégie de réplication de $G = \Phi(S_T)$ et le prix de G à la date t est $v(t, S_t)$. Preuve.

Les Grecques

- **delta** : $\partial_x u^G(t, S_t)$
- **gamma** : $\partial_{xx} u^G(t, S_t)$
- **thêta** : $\partial_t u^G(t, S_t)$

Fiche de Mouvement Brownien.
http ://ausset.me/cheatsheets