

Processus Continus

Vecteurs et Processus Gaussiens

Espaces et processus gaussiens

Définition. Un processus aléatoire $(X_t)_{t \in T}$ à valeurs dans \mathbb{R}^n est un processus gaussien (centré) si toute combinaison linéaire finie des variables $X_t, t \in T$ est gaussienne centrée.

Proposition. Si $(X_t)_{t \in T}$ est un processus gaussien, le sous-espace vectoriel fermé de L^2 engendré par les variables $X_t, t \in T$ est un espace gaussien, appelé espace gaussien engendré par le processus X .

Théorème. Soit H un espace gaussien et soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de H . Alors les sous-espaces $H_i, i \in I$ sont orthogonaux deux à deux dans L^2 si et seulement si les tribus $\sigma(H_i), i \in I$ sont indépendantes.

Mesures gaussiennes

Définition. Soit (E, \mathcal{E}) un espace mesurable, et soit μ une mesure σ -finie sur (E, \mathcal{E}) . Une mesure gaussienne d'intensité μ est une isométrie G de $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ sur un espace gaussien. Donc, si $f \in L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$, $G(f)$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance : $\mathbb{E}[G(f)^2] = \|G(f)\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)}^2 = \|f\|_{L^2(E, \mathcal{E}, \mu)}^2$. En particulier, si $f = \mathbb{1}_A$ avec $\mu(A) < \infty$, $G(\mathbb{1}_A)$ suit la loi $\mathcal{N}(0, \mu(A))$. On notera pour simplifier $G(A) = G(\mathbb{1}_A)$.

Proposition. Soient (E, \mathcal{E}) un espace mesurable et μ une mesure σ -finie sur (E, \mathcal{E}) . Il existe alors une mesure gaussienne d'intensité μ .

Mouvement Brownien

Pré-mouvement brownien

Définition. Soit G une mesure gaussienne sur \mathbb{R}_+ d'intensité la mesure de Lebesgue. Le processus $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ défini par $B_t = G(\mathbb{1}_{[0, t]})$ est appelé pré-mouvement brownien.

Proposition. Le processus $(B_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien (centré) de fonction de covariance $K(s, t) = \min\{s, t\}$

Proposition. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus aléatoire à valeurs réelles. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

- $(X_t)_{t \geq 0}$ est un pré-mouvement brownien
- $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien centré de covariance $K(s, t) = s \wedge t$
- $X_0 = 0$ p.s. et pour tous $0 \leq s < t$, la variable $X_t - X_s$ est indépendante de $\sigma(X_r, r \leq s)$ et suit la loi $\mathcal{N}(0, t - s)$
- $X_0 = 0$ p.s. et pour tout choix de $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p$, les variables $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}, 1 \leq i \leq p$ sont indépendantes, la variable $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ suivant la loi $\mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$

Proposition. Soit B un pré-mouvement brownien. Alors,

- $-B$ est aussi un pré-mouvement brownien
- pour tout $\lambda > 0$, le processus $B_t^\lambda = \frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 t}$ est aussi un pré-mouvement brownien
- pour tout $s \geq 0$, le processus $B(s) = B_{s+t} - B_s$ est un pré-mouvement brownien indépendant de $\sigma(B_r, r \leq s)$ (propriété de Markov simple)

Continuité des trajectoires

Proposition. Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un pré-mouvement brownien. Le processus B a une modification dont les trajectoires sont continues, et même localement höldériennes d'exposant $1 - \delta$ pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$.

Définition. Un processus $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien (réel, issu de 0) si

- $(B_t)_{t \geq 0}$ est un pré-mouvement brownien
- Les trajectoires de B , c'est-à-dire les applications $t \rightarrow B_t(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$, sont toutes continues

Comportement des trajectoires

Proposition. On a p.s. pour tout $\varepsilon > 0$, $\sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s > 0, \inf_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s > 0$

- p.s., $\forall a \in \mathbb{R}, \inf\{t \geq 0 : B_t = a\} < \infty$
- $\limsup_{t \rightarrow \infty} B_t = +\infty$ et $\liminf_{t \rightarrow \infty} B_t = -\infty$

Propriétés de Markov

Théorème (Propriété de Markov forte). Soit T un temps d'arrêt tel que $\mathbb{P}(T < \infty) > 0$. On pose pour tout $t \geq 0$ $B_t^{(T)} = \mathbb{1}_{\{T < \infty\}}(B_{T+t} - B_T)$. Alors sous $\mathbb{P}(\cdot | T < \infty)$, le processus $B_t^{(T)}$ est un mouvement brownien indépendant de \mathcal{F}_T

Théorème. Pour tout $t > 0$, notons $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$. Alors, si $a \geq 0$ et $b \leq a$, on a

$$\mathbb{P}[S_t \geq a, B_t \leq b] = \mathbb{P}[B_t \geq 2a - b]$$

En particulier S_t a même loi que $|B_t|$

Corollaire. Pour tout $a > 0$, T_a a même loi que $\frac{a^2}{B_1^2}$.

Filtrations et martingales

Temps d'arrêt

Définition. Une variable aléatoire $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ est un temps d'arrêt de la filtration (\mathcal{F}_t) si, pour tout $t \geq 0, \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Proposition. Soit T un temps d'arrêt. Alors T est \mathcal{F}_T -mesurable

- Si (S_n) est une suite croissante de temps d'arrêt, alors $S = \lim \uparrow S_n$ est aussi un temps d'arrêt
- Si (S_n) est une suite décroissante de temps d'arrêt, alors $S = \lim \downarrow S_n$ est un temps d'arrêt de la filtration (\mathcal{F}_{t+})

Théorème (Temps d'entrée). Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté, à valeurs dans un espace métrique (E, d) .

- Supposons que les trajectoires de X sont continues à droite, et soit O un ouvert de E . Alors $T_O = \inf\{t \geq 0 : X_t \in O\}$ est un temps d'arrêt de la filtration (\mathcal{F}_{t+})
- Supposons que les trajectoires de X sont continues, et soit F un fermé de E . Alors $T_F = \inf\{t \geq 0 : X_t \in F\}$ est un temps d'arrêt

Martingales et surmartingales

Proposition. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une sous-martingale ou une surmartingale. Alors pour tout $t > 0, \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E}[|X_s|] < \infty$

Proposition. Soit (M_t) une martingale de carré intégrable ($M_t \in L^2$ pour tout $t \geq 0$). Soient $0 \leq s < t$ et soit $s = t_0 < t_1 < \dots < t_p = t$ une subdivision de l'intervalle $[s, t]$.

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^p (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 | \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s]$$

Proposition (Inégalités de Doob). 1. Soit (X_t) une surmartingale (à temps continu) à trajectoires continues à droite. Alors, pour tout $t > 0$ et tout $\lambda > 0$

$$\lambda \mathbb{P}\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s| > \lambda\right] \leq \mathbb{E}[|X_0|] + 2\mathbb{E}[|X_t|]$$

- Soit (X_t) une martingale à trajectoires continues à droite. Alors pour tout $t > 0$ et tout $p > 1$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|X_t|^p]$$

Théorème. Supposons que la filtration (\mathcal{F}_t) satisfait les conditions habituelles. Si $X = (X_t)$ est une surmartingale et si la fonction $t \rightarrow \mathbb{E}[X_t]$ est continue à droite, alors X a une modification, qui est aussi une (\mathcal{F}_t) -surmartingale, càdlàg.

Théorèmes d'arrêt

Théorème. Soit X une surmartingale à trajectoires continues à droite et bornée dans L^1 . Alors, il existe une variable $X_\infty \in L^1$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X_\infty, \text{ p.s.}$$

Proposition. Soit (X_t) une martingale à trajectoires continues à droite. Alors il y a équivalence entre

- (X_t) est fermée
- X_t converge p.s. et dans L^1 quand $t \rightarrow \infty$, vers une variable notée X_∞
- la famille (X_t) est uniformément intégrable

Théorème (Théorème d'arrêt). Soit (X_t) une martingale à trajectoires continues à droite et uniformément intégrable. Soient S et T deux temps d'arrêt avec $S \leq T$. Alors X_S et X_T sont dans L^1 et

$$X_S = \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S]$$

Corollaire. Soit (X_t) une martingale à trajectoires continues à droite et soient $S \leq T$ deux temps d'arrêt bornés. Alors $X_S = \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S]$.

Semimartingales Continues

Processus à variation finie

Définition. Soit $T > 0$. Une fonction continue $a : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $a(0) = 0$ est dite à variation finie s'il existe une mesure signée μ sur $[0, T]$ telle que $a(t) = \mu([0, t])$ pour tout $t \in [0, T]$.

Proposition. Pour tout $t \in]0, T]$

$$|\mu|([0, t]) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^p |a(t_i) - a(t_{i-1})| \right\}$$

où le supremum porte sur toutes les subdivisions.

Définition. Un processus à variation finie $A = (A_t)$ est un processus adapté dont toutes les trajectoires sont à variation finie au sens de la définition précédente. Le processus A est appelé processus croissant si de plus les trajectoires de A sont croissantes.

Proposition. Soit A un processus à variation finie et soit H un processus progressif tel que

$$\forall t \geq 0 \forall \omega \in \Omega \int_0^t |H_s(\omega)| |dA_s(\omega)| < \infty$$

Alors le processus $H \cdot A$ défini par

$$(H \cdot A)_t = \int_0^t H_s dA_s$$

est un processus à variation finie.

Martingales locales

Définition (Martingales locales). Un processus adapté à trajectoires continues $M = (M_t)$ tel que $M_0 = 0$ p.s. est une martingale locale (continue) s'il existe une suite croissante (T_n) de temps d'arrêt telle que $T_n \uparrow \infty$ et pour tout n le processus arrêté M^{T_n} est une martingale uniformément intégrable. Plus généralement, lorsque $M_0 \neq 0$, on dit que M est une martingale locale si $M_t = M_0 + N_t$, où le processus N est une martingale locale issue de 0.

<http://ausset.me/cheatsheets>