

Processus de Lévy

Processus de Poisson

Définition. Un processus de Poisson N de paramètre $\lambda > 0$ est un processus de comptage

$$\forall t \geq 0, N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{T_n \leq t}$$

associé à une famille $(T_n; n \in \mathbb{N})$ (avec $T_0 = 0$) de va représentant les temps d'arrivées, telle que les va $(T_{n+1} - T_n; n \in \mathbb{N})$ sont iid de loi exponentielle de paramètre λ .

Proposition. Si N est un processus de Poisson alors

- la somme $N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{T_n \leq t}$ est presque sûrement finie pour tout $t \geq 0$.
- les trajectoires de N sont constantes par morceaux, avec des sauts de taille 1 seulement
- les trajectoires sont càdlàg
- $\forall t > 0, \mathbb{P}(N_{t-} = N_t) = 1$
- $\forall t > 0, N_t$ suit une loi de Poisson de paramètre λt :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

En particulier on a :

$$\mathbb{E}[N_t] = \lambda t = \text{Var}[N_t], \mathbb{E}[e^{iuN_t}] = \exp(\lambda t(e^{iu} - 1))$$

- $\forall n \geq 1, T_n$ une loi gamma de paramètre (n, λ) de densité :

$$f_{T_n}(x) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{t > 0}$$

- N est à accroissements indépendants et stationnaires.

Définition. Soit N un processus stochastique (issu de 0) à valeurs réelles et càdlàg. N est un processus de Poisson ssi :

- N est un processus croissant, constant par morceaux, ne faisant que des sauts de taille 1,
- $\forall t, s \geq 0$, la va $N_{t+s} - N_t$ est indépendant de la tribu engendrée par les $(N_u; 0 \leq u \leq t)$
- $\forall t, s \geq 0$, la va $N_{t+s} - N_t$ a même loi que N_s .

On retrouve alors les va T_n en les définissant comme les sauts du processus N :

$$T_0 = 0, T_n = \inf\{t > T_{n-1}; N_t - N_{T_{n-1}} > 0\} \text{ pour } n \geq 1$$

Ce sont des temps d'arrêt par rapport à la filtration naturelle du processus N .

Théorème (Comportement asymptotique). Si N est un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ alors, lorsque t tend vers $+\infty$:

$$p.s. \frac{N_t}{t} \rightarrow \lambda \text{ et } \sqrt{\frac{t}{\lambda}} \left(\frac{N_t}{t} - \lambda \right) \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Définition (Processus de Poisson composés). Un processus de Poisson avec intensité $\lambda > 0$ et loi de sauts ν_Z est un processus stochastique défini par

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$$

où $(Z_n)_n$ est une suite de va iid à valeurs dans \mathbb{R}^d de loi ν_Z et N est un processus de Poisson de paramètre λ indépendant de la suite $(Z_n)_n$. Sa fonction caractéristique est donnée par :

$$\phi_{X_t}(u) = \exp\left(t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle u, y \rangle} - 1) \lambda \nu_Z(dy)\right)$$

X est à accroissements indépendants et stationnaires.

Processus de Lévy

Lois infiniment divisible

Définition. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d de loi μ_X . On dit que X est infiniment divisible si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des va iid $Y_1^{(n)}, \dots, Y_n^{(n)}$ telles que

$$X = Y_1^{(n)} + \dots + Y_n^{(n)}$$

Soit $\varphi_X(u) = \mathbb{E}[e^{i\langle u, X \rangle}]$ la fonction caractéristique de X .

Proposition. Il y a équivalence entre :

- X est infiniment divisible,
- pour tout n , φ_X a une racine n -ième qui est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire.

Formule de Lévy-Khintchine

On dira que ν est une mesure de Lévy si

$$\int_{\mathbb{R}^d - \{0\}} (1 \wedge z^2) \nu(dz) < +\infty$$

C'est une mesure σ -finie. C'est équivalent de dire que

$$\int_{\mathbb{R}^d - \{0\}} \frac{z^2}{1 + z^2} \nu(dz) < +\infty$$

Théorème (Formule de Lévy-Khintchine). Soit X une va à valeurs dans \mathbb{R}^d . Alors X est infiniment divisible s'il existe $b \in \mathbb{R}^d$, une matrice $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ et une mesure de Lévy ν tels que

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \varphi_X(u) = \exp\left(i\langle b, u \rangle - \frac{1}{2}\langle u, Au \rangle + \int_{\mathbb{R}^d - \{0\}} (e^{i\langle u, z \rangle} - 1 - i\langle u, z \rangle \mathbb{1}_{|z| \leq 1}) \nu(dy)\right)$$

Réciproquement, toute application de la forme ci-dessus est la fonction caractéristique d'une va infiniment divisible sur \mathbb{R}^d .

Processus de Lévy

Définition. On dit que X est un processus de Lévy (issu de 0) si

- $X_0 = 0$ presque sûrement
- X est à accroissements indépendants et stationnaires
- X est stochastiquement continu : $\forall \epsilon > 0$ et $t \geq 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| > \epsilon) = 0$$

Proposition. Si X est un processus de Lévy, alors X_t est une loi infiniment divisible pour tout $t \geq 0$.

Théorème. Si X est un processus de Lévy, alors

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \varphi_{X_t}(u) = e^{t\eta(u)}$$

où η est le symbole de Lévy de X_1 .

Proposition. Si $X = (X_t; t \geq 0)$ est un processus stochastique et s'il existe une suite $X_n = (X_t^n; t \geq 0)_n$ de processus de Lévy telle que :

- X_t^n converge en probabilité vers X_t pour tout $t \geq 0$
 - pour tout $\epsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}(|X_t^n - X_t| > \epsilon) = 0$
- alors X est un processus de Lévy.

Théorème (Propriété de Markov Forte). Si X est un processus de Lévy et si τ est un temps d'arrêt adapté à la filtration \mathcal{F}^X , alors, sur $\{\tau < +\infty\}$

- le processus $X^\tau = (X_{t+\tau} - X_\tau; t \geq 0)$ est un processus de Lévy indépendant de la tribu \mathcal{F}_τ^X
- pour tout $t \geq 0$, X_t^τ a même loi que X_t
- X^τ est à trajectoires càdlàg et est $F_{\tau+t}$ adapté.

Théorème. Si X est un processus de Lévy à valeurs réelles, croissant (presque sûrement) et ne faisant que des sauts de taille 1, alors X est un processus de Poisson.

Théorème. Si X est un processus de Lévy càdlàg à valeurs réelles, presque sûrement à trajectoires constantes par morceaux, alors X est un processus de Poisson composé. La réciproque est trivialement vraie.

Sauts des Processus de Lévy

Si X est un processus de Lévy, on définit le processus de sauts associé $\Delta X = (\Delta X_t; t \geq 0)$ avec $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$.

Proposition. Si X est un processus de Lévy alors, pour chaque $t \geq 0$ on a $\Delta X_t = 0$ presque sûrement.

Définition. Soit $t \geq 0$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\})$. On définit la quantité aléatoire

$$N(t, A) = \#\{0 \leq s \leq t; \Delta X_s \in A\} = \sum_{0 \leq s \leq t} \mathbb{1}_A(\Delta X_s)$$

$\forall \omega, A \rightarrow N(t, A)(\omega)$ est une mesure de comptage sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\})$
 $A \rightarrow \mathbb{E}[N(t, A)]$ est une mesure borélienne sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\})$
On notera $\mu(\cdot) = \mathbb{E}[N(1, \cdot)]$ appelé mesure d'intensité du processus X .

Lemme. Si A est borné inférieurement et borélien, alors $N(t, A) < \infty$ presque sûrement.

Théorème. Si A est borné inférieurement, alors le processus $(N(t, A); t \geq 0)$ est un processus de Poisson d'intensité $\mu(A)$. De plus si $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\})$ sont disjoints alors les variables aléatoires $N(t, A_1), \dots, N(t, A_m)$ sont indépendantes.

Mesure aléatoire de Poisson

Définition. Soit μ une mesure σ finie sur (S, \mathcal{A}) . Une mesure aléatoire de Poisson N sur (S, \mathcal{A}) est une collection de variables aléatoires $(M(B); B \in \mathcal{A})$ telle que :

- pour tout $B \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(B) < +\infty$, $N(B)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(B)$
- si A_1, \dots, A_m sont des ensembles disjoints de A , les variables aléatoires $N(A_1), \dots, N(A_m)$ sont indépendantes
- pour tout $\omega \in \cdot$, l'application $A \rightarrow N(A, \omega)$ est une mesure de comptage sur (S, \mathcal{A}) .

On définit la mesure aléatoire de Poisson compensée \tilde{N} par :

$$\tilde{N}(t, A) = N(t, A) - t\mu(A) = N(t, A) - t\mathbb{E}[N(1, A)]$$

Intégration de Poisson

On définit pour tout $t \geq 0$ et $\omega \in \cdot$ l'intégrale de Poisson de f par

$$\int_A f(z)N(t, dz) = \sum_{z \in A} f(z)N(t, z)$$

Si N est associée à un processus de Lévy, cette intégrale coïncide avec

$$\int_A f(z)N(t, dz) = \sum_{0 \leq s \leq t} f(\Delta X_s) \mathbb{1}_A(\Delta X_s)$$

Théorème. Soit A un ensemble borélien borné inférieurement.

Alors :

- pour tout $t \geq 0$, $\int_A f(z)N(t, dz)$ suit une loi de Poisson composée caractérisée par :

$$\mathbb{E} \left[e^{i \langle u, \int_A f(z)N(t, dz) \rangle} \right] = \exp \left(t \int_A (e^{i \langle u, f(z) \rangle} - 1) \mu(dz) \right)$$

- si $f \in L^1(A, \mu)$ on a :

$$\mathbb{E} \left[\int_A f(z)N(t, dz) \right] = t \int_A f(z) \mu(dz)$$

- si $f \in L^2(A, \mu)$ on a :

$$\text{Var} \left(\left| \int_A f(z)N(t, dz) \right| \right) = t \int_A |f(z)|^2 \mu(dz)$$

Corollaire. Soit A un ensemble borélien borné inférieurement. Le processus $t \rightarrow \int_A f(z)N(t, dz)$ est un processus de Poisson composé.

Proposition. Si A, B sont bornés inférieurement et si $f \in L^2(A, \mu)$, $g \in L^2(B, \mu)$, on a :

$$\left\langle \int_A f(z)\tilde{N}(t, dz), \int_B g(z)\tilde{N}(t, dz) \right\rangle = t \int_{A \cap B} f(z)g(z)\mu(dz)$$

Décomposition d'Itô-Lévy

Théorème (Itô-Lévy). Si X est un processus de Lévy alors il existe $b \in \mathbb{R}^d$, un mouvement brownien B , une matrice de covariance $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ et une mesure aléatoire de Poisson indépendante N on $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^d - \{0\})$, dont l'intensité est une mesure de Lévy ν , tels que, pour tous $t \geq 0$:

$$X_t = b_t + A^{1/2}B_t + \int_{|z| < 1} z\tilde{N}(t, dz) + \int_{|z| > 1} zN(t, dz)$$

Intégration stochastique

Formule d'Itô

Soit $B = (B_t; t \geq 0)$ un F_t -mouvement brownien standard d -dimensionnel. Soit N une F_t -mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\})$ d'intensité $dt \otimes d\nu$, où ν est une mesure de Lévy. Soit N sa mesure aléatoire de Poisson compensée. Soit $b : [0, T] \times \cdot \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $\sigma : [0, T] \times \cdot \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ des processus \mathcal{F}_t -adapté prévisible tels que :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T (|b(r)|^2 + |\sigma(r)|^2) dr \right] < +\infty$$

et $H, K : [0, T] \times (\mathbb{R}^d / 0) \times \cdot \rightarrow \mathbb{R}^d$ des processus prévisibles tels que $H \in H^2(T, \nu)$. On considère le processus, pour $0 \leq t \leq T$.

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(r) dr + \int_0^t \sigma(r) dB_r + \int_0^t \int_{|z| < 1} H(r, z)\tilde{N}(dr, dz) + \int_0^t \int_{|z| > 1} K(r, z)N(dr, dz).$$

Théorème. Si X est telle que ci-dessus, alors, pour toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ et $t \geq 0$, p.s. :

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \int_0^t \langle \partial_x f(X_{r-}), b(r) \rangle dr + \int_0^t \langle \partial_x f(X_{r-}), \sigma(r) dB_r \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \text{Tr}(\partial_{xx}^2 f(X_{r-}) \sigma(r) \sigma(r)^\top) dr \\ &+ \int_0^t \int_{|z| > 1} [f(X_{r-} + K(r, z)) - f(X_{r-})] N(dr, dz) \\ &+ \int_0^t \int_{|z| < 1} [f(X_{r-} + H(r, z)) - f(X_{r-})] \tilde{N}(dr, dz) \\ &+ \int_0^t \int_{|z| < 1} [f(X_{r-} + H(r, z)) - f(X_{r-}) - \langle H(r, z), \partial_x f(X_{r-}) \rangle] dr \nu(dz) \end{aligned}$$

Théorème. Ou alors :

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \underbrace{\int_0^t \partial_i f(X_{s-}) dY_c^i(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_{ij}^2 f(X_{s-}) d\langle Y_c^i, Y_c^j \rangle(s)}_{\text{Itô "Normal"}} \\ &+ \underbrace{\int_0^t \int_{|z| > 1} [f(X_{s-} + K(s, z)) - f(X_{s-})] N(ds, dz)}_{\text{Variations de } f, \text{ grands sauts, non compensé}} \\ &+ \int_0^t \int_{|z| < 1} [f(X_{s-} + H(s, z)) - f(X_{s-})] \tilde{N}(ds, dz) \\ &+ \underbrace{\int_0^t \int_{|z| < 1} [f(X_{s-} + H(s, z)) - f(X_{s-}) - H^i(s, z) \partial_i f(X_{s-})] ds \nu(dz)}_{\text{Variations de } f, \text{ petits sauts, compensé}} \end{aligned}$$