Théorie des jeux

Jeux sous forme normale

Deux joueurs a somme nulle

Modèle

Définition. *Jeu* $\Gamma = (A, B, g)$

- A *actions de* J_1
- B *actions de* J_2
- $g : A \times B \to \mathbb{R}$ *fonction que* J_1 *maximise et* J_2 *minimise*

Valeur en stratégies pures

Définition (sup inf et inf sup). *Le* $\sup\inf$ *en stratégies pures du jeu* Γ*, noté* $\underline{v}(\Gamma)$ *(ou simplement* $\underline{v}$ *) est :*

$$\underline{v} = \sup_{a\in A}\left(\inf_{b\in B} g(a,b)\right)$$

C'est le paiement maximal que J_1 *peut s'assurer quelque soit l'action de* J_2*.*
L'$\inf\sup$ *en stratégies pures du jeu* Γ*, noté* $\bar{v}(\Gamma)$ *(ou simplement* $\bar{v}$ *) est :*

$$\bar{v} = \inf_{b\in B}\left(\sup_{a\in A} g(a,b)\right)$$

L'$\inf\sup$ *représente le paiement minimal que* J_2 *peut assurer quelque soit l'action de* J_1*.*

Proposition (Caractérisation). $\underline{v}$ *est caractérisé par :*

$$\begin{cases} \text{"}J_1 \text{ garantit } \underline{v} \text{ à } \varepsilon \text{ près" : } \forall\varepsilon > 0, \exists a \in A, \forall b \in B, g(a,b) \geq \underline{v} - \varepsilon \\ \text{"}J_2 \text{ défend } \underline{v} \text{ à } \varepsilon \text{ près" : } \forall\varepsilon > 0, \forall a \in A, \exists b \in B, g(a,b) \leq \underline{v} + \varepsilon \end{cases}$$

$\bar{v}$ *est caractérisé par :*

$$\begin{cases} \text{"}J_2 \text{ garantit } \bar{v} \text{ à } \varepsilon \text{ près" : } \forall\varepsilon > 0, \exists b \in B, \forall a \in A, g(a,b) \leq \bar{v} + \varepsilon \\ \text{"}J_1 \text{ défend } \bar{v} \text{ à } \varepsilon \text{ près" : } \forall\varepsilon > 0, \forall b \in B, \exists a \in A, g(a,b) \geq \bar{v} - \varepsilon \end{cases}$$

Définition (Valeur). *Si* $\bar{v} \leq \underline{v}$*, on dit que le jeu a une valeur* v *en stratégies pures, avec* $v = \bar{v} \leq \underline{v}$*.*

Théorème (Sion). *Soit* $\Gamma = (A, B, g)$ *un jeu à somme nulle, on suppose que*

- A *et* B *sont des compacts convexes non vides.*
- *Pour tout* $b \in B$*, la fonction* $a \to g(a, b)$ *est concave semi continue supérieurement.*
- *Pour tout* $a \in A$*, la fonction* $b \to g(a, b)$ *est convexe semi continue inférieurement.*

Alors le jeu Γ *a une valeur en stratégies pures et chaque joueur a des stratégies optimales.*

Théorème (Minimax, von Neumann). *Tout jeu fini a une valeur en stratégies mixtes.*

Proposition (Propriétés des stratégies). *Les propriétés suivantes sont vraies.*

1. *Tout jeu fini admet un point selle (en stratégies mixtes) :* $\exists(x^*, y^*) \in X \times Y$ *tel que* $g(x, y^*) \leq g(x^*, y^*) \leq g(x^*, y) \forall x \in X, \forall y \in Y$.
2. *Tout point selle vérifie* $g(x^*, y^*) = V$.
3. (x^*, y^*) *est un point selle si et seulement si* $g(a, y^*) \leq g(x^*, y^*) \leq g(x^*, b) \forall a \in A, \forall b \in B$.
4. *Si* (x^*, y^*) *est un couple de stratégies optimales, et si* $x_i^* > 0$*, alors* $g(a_i, y^*) = V$ *.*
5. *Si* (x^*, y^*) *est un couple de stratégies optimales, et si* $x_i^* > 0$ *et* $x_j^* > 0$*, alors* $g(a_i, y^*) = g(a_j, y^*)$

Proposition (Elimination mixte). *Supposons la stratégie pure* $a_i \in A$ *dominée strictement par la stratégie mixte* $\tilde{x} \in X$ *:*

$$g(a_i, y) < g(\tilde{x}, y) \forall y \in Y$$

Alors le jeu Γ *et le jeu* $\Gamma' = (A\backslash a_i, B, g)$ *dans lequel on a éliminé l'action pure* a_i *ont la même valeur en stratégies mixtes, et les mêmes stratégies optimales.*

Jeux à n joueurs

Modèle

Formellement, un jeu sous forme normale $\Gamma = \left(N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N}\right)$ est la donnée

- d'un ensemble de joueurs N, que l'on supposera toujours fini. Par abus de notation on notera également N son cardinal.
- de N ensembles non vides A^i, A^i étant l'ensembles d'actions du joueur i.
- de N fonctions bornées $g^i : \Pi_{j\in N} A^j \to R$, g^i étant la fonction de paiement du joueur i.

Equilibres en stratégies dominantes

Définition. *La stratégie* $a^i \in A^i$ *est une meilleure réponse du joueur* i *au profil de stratégie des autres joueurs* $a^{-i} \in A^{-i}$ *si pour toute autre stratégie* $b^i \in A^i, g^i(b^i, a^{-i}) \leq g^i(a^i, a^{-i})$*, c'est à dire si*

$$g^i(a^i, a^{-i}) = \max_{b^i\in A^i} g^i(b^i, a^{-i})$$

Définition (Stratégie dominante). *La stratégie* $a^i \in A^i$ *est dominante si* $g^i(b^i, b^{-i}) \leq g^i(a^i, b^{-i})$ *pour tout profil de stratégies* $b \in A$*. Un équilibre en stratégies dominantes est un profil d'action* $a \in A$ *tel que pour tout joueur* i*,* a^i *est dominante.*

Equilibres de Nash

Définition (Equilibre de Nash). *Un équilibre de Nash (en stratégies pures) est un profil d'actions* $a \in A$ *tel que pour tout joueur* i*, l'action* a^i *soit une meilleure réponse au profil* a^{-i} *:*

$$\forall i, \forall bi \in A^i, g^i(a^i, a^{-i}) \geq g^i(b^i, a^{-i})$$

Théorème (Glicksberg-Nash). *Soit* $\Gamma = \left(N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N}\right)$ *un jeu tel que pour chaque joueur* i*,*

- A_i *est un sous ensemble convexe et compact d'un espace euclidien.*
- *La fonction de paiement* g^i *est continue.*
- *Pour tout profil* $a^{-i} \in A^{-i}$*, la fonction* $a^i \to g^i(a^i, a^{-i})$ *est concave.*

Alors Γ *possède un équilibre de Nash en stratégies pures.*

Sous Forme extensive

Théorème (Zermelo-Kuhn). *Tout jeu à information parfaite fini admet un équilibre de Nash en stratégies pures. En particulier, si le jeu est à somme nulle, le jeu a une valeur et les deux joueurs ont des stratégies optimales.*

Jeux répétés

Information complete

Modèle

Définition. *La forme stratégique du jeu répété* T *fois* Γ_T *est donnée par :*

$$(N, (S^i)_{i\in N}, \gamma_T^i)$$

avec $\gamma_T^i(s) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_s}\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^T g^{i,k_t}(a_t)\right]$.
La forme stratégique du jeu Γ *est donnée par :*

$$(N, (S^i)_{i\in N}, \gamma_\lambda^i)$$

avec $\gamma_\lambda^i(\sigma) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\sigma}\left[\sum_{t\geq 1}\lambda(1-\lambda)^{t-1} g^{i,k_t}(a^t)\right]$

Théorème. *Pour tout entier* T *et tout* $\lambda \in]0, 1]$*, les jeux* Γ_T *et* Γ_λ *admettent des équilibres de Nash en stratégies de comportement. En particulier, dans le cas de jeu à somme nulle,* Γ_T *et* Γ_λ *ont chacun une valeur et les deux joueurs ont des stratégies optimales.*

Définition. *Soit* Γ_∞ *un jeu infiniment répété à somme nulle, notons* $g = g^1 = -g^2$*.*

- *Le joueur 1 garantit uniformément le paiement* $d \in R$ *si :*

  $$\forall\varepsilon > 0, \exists\sigma^1 \in \Sigma^1, \exists T_0, \forall\sigma^2 \in \Sigma^2, \forall T \geq T_0, \gamma_T(\sigma^1, \sigma^2) \geq d - \varepsilon$$

- *Le joueur 2 défend uniformément le paiement* $d \in R$ *si :*

  $$\forall\varepsilon > 0, \forall\sigma^1 \in \Sigma^1, \exists\sigma^2 \in \Sigma^2, \exists T_0, \forall T \geq T_0, \gamma^T(\sigma^1, \sigma^2) \leq d + \varepsilon$$

- *Le* $\max\min$ *uniforme* $\underline{v}$ *de* Γ_∞*, s'il existe, est tel que le joueur 1 garantit uniformément* $\underline{v}$ *et le joueur 2 défend uniformément* $\underline{v}$*. On définit le* $\min\max$ *uniforme* $\bar{v}$ *en échangeant les rôles des joueurs.*

- *Le jeu* Γ_∞ *a une valeur* v *si* $v = \underline{v} = \bar{v}$*.*

- *Lorsque le jeu a une valeur, une stratégie* σ^1 *du joueur 1 sera dite optimale si elle vérifie :*

  $$\forall\varepsilon > 0, \exists T_0, \forall\sigma^2 \in \Sigma^2, \forall T \geq T_0, \gamma_T(\sigma^1, \sigma^2) \geq v - \varepsilon$$

  On définit similairement les stratégies optimales du joueur 2.

Définition (Ensemble des paiements réalisables)**.** *On appelle ensemble réalisable l'enveloppe concave* $\text{conv}g(A)$ *des vecteurs* $g(a)$*,* $a \in A$*. Pour chaque joueur* i*, posons*

$$v^i = \min_{a^{-i}\in\prod_{j\neq i}\Delta(A^j)} \max_{a^i\in A^i} g^i(a^i, a^{-i})$$

$$IR = \{x \in \mathbb{R}^n | \forall i \in \mathbb{N}, x^i \geq v^i\}$$

La quantité v^i *s'appelle niveau de rationalité individuelle ou niveau* $\min\max$ *du joueur* i *:* v^i *est le plus petit paiement que le joueur* i *peut obtenir dans le jeu* G *en jouant une meilleure réponse contre un profil de stratégies mixtes de ses adversaires. C'est aussi le plus petit paiement que les joueurs* $-i$ *peuvent garantir s'ils jouent dans le but de minimiser le paiement du joueur* i*. Posons enfin* $E = \text{conv}g(A) \cap IR$*.*

Lemme (Folk Theorem)**.**

$$E_\infty = E$$

Théorème. *Supposons que pour tout joueur* i*, il existe* $e(i) \in E_1$ *tel que* $e^i(i) > v^i$*. Alors* $E_T \to E$*.*

Théorème (Sorin)**.** *Si le jeu est à deux joueurs ou qu'il existe* $x \in E$ *tel que* $x^i > v^i$ *pour tout* i*, alors* $E_\lambda \underset{\lambda\to 0}{\to} E$*.*

Théorème (Sous-jeu parfait)**.** *On note* E'_∞ *l'ensemble des paiements d'équilibre sous-jeu parfaits de* Γ_∞*.*

$$E'_\infty = E_\infty = E$$

Théorème (Benoit et Krishna)**.** *Supposons que pour tout* i*, il existe* $e(i), f(i) \in E_1$ *tels que* $e^i(i) > f^i(i)$*. Alors* $E'_T \to E$*.*

Théorème (Fudenberg et Maskin)**.** *Si* E *est d'intérieur non vide alors,* $E'_\lambda \underset{\lambda\to 0}{\to} E$*.*

Information incomplète

Modèle

On a une famille $(G^k)_{k\in K}$ de jeux matriciels de même taille $I \times J$, et une probabilité p sur K. Le jeu $\Gamma_\infty(p)$ est joué ainsi :

- initialement, un état de la nature k est tiré, une fois pour toutes, selon p. J_1 apprend k, pas J_2.
- à chaque étape $t = 1, 2, \ldots$, simultanément J_1 choisit une action i_t dans I et J_2 choisit une action j_t dans J. Le paiement d'étape de J_1 est alors $G_1^k(i_t, j_t)$, celui de J_2 est $G_2^k(i_t, j_t)$, mais tout ce que les joueurs apprennent avant de passer à l'étape $t + 1$ est le couple (i_t, j_t).
- Une stratégie de J_1 est un élément $\sigma = (\sigma_t)_{t\geq 1}$, avec $\sigma_t : K \times (I \times J)^{t-1} \to \Delta(I)$ pour tout t.
- Une stratégie de J_2 est un élément $\tau = (\tau_t)_{t\geq 1}$, avec $\tau_t : K \times (I \times J)^{t-1} \to \Delta(J)$ pour tout t.
- On note respectivement Σ et $\mathcal{T}$ les ensembles de stratégies des joueurs 1 et 2.

Éclatement et concavification

$p = (p^k)_{k\in K}$ est la probabilité initiale, ou l'a priori de J_2 sur l'état de la nature. J_1 choisit sa première action s, en fonction de l'état de la nature k sélectionné. Notons $x = (x^k)_{k\in K} \in \Delta(S)^K$ la probabilité de transition utilisée : si l'état est k, le joueur 1 choisit le signal s avec probabilité $x^k(s)$. La probabilité totale que s arrive est notée : $\lambda_s = \sum_{k\in K} p^k x^k(s)$, et si $\lambda_s > 0$ la probabilité conditionnelle sur K (ou a posteriori) sachant s vaut : $\hat{p}(x, s) = \left(\frac{p^k x^k(s)}{\lambda_s}\right)_{k\in K}$

Lemme (Splitting)**.** *Supposons que* $p = \sum_{s\in S} \lambda_s p_s$*, avec* S *fini, pour tout* $s \in S$*,* $\lambda_s > 0$*,* $p_s \in \Delta(K)$*, et* $\sum_{s\in S} \lambda_s = 1$*. Alors il existe une probabilité de transition* $x \in \Delta(S)^K$ *telle que :*

$$\forall s \in S, \lambda_s = \sum_{k\in K} p^k x^k(s) \text{ et } \hat{p}(x, s) = p_s$$

Lemme. *Si le joueur* 1 *garantit* f*, alors le joueur* 1 *garantit* $\text{cav}f$ *avec :*

$$\text{cav}f(p) = max\{\sum_{s\in S}\lambda_s f(p_s) | S \text{ fini}, \forall s \in S \lambda_s \geq 0, \\ p_s \in \Delta(K), \sum_{s\in S}\lambda_s = 1, \sum_{s\in S}\lambda_s p_s = p\}$$

Corollaire. *Notons, pour toute probabilité* p *dans* $\Delta(K)$*,* $u(p)$ *la valeur du jeu matriciel* $G(p) = \sum_{k\in K} p^k G^k$ *non révélateur. Alors le joueur* 1 *garantit* $\text{cav}u$

Définition. *Pour* p *dans* $\Delta(K)$*, on pose* $v^*(p) = \inf_{T\geq 1} v_T(p)$*.* v^* *est concave et M-Lipschitz avec*

$$M = \max\left\{|G^k(i, j)| | k \in K, i \in I, j \in J\right\}$$

Lemme. *La suite de fonctions* $(v_T)_T$ *converge uniformément sur* $\Delta(K)$ *vers* v^**, et le joueur* 2 *garantit* v^* *dans le jeu infiniment répété.*

Martingale des a posteriori

Définition. *Soit* $(\sigma, \tau) \in \Sigma \times T$ *un profil de stratégies dans* $\Gamma_\infty(p)$*. Pour* $t \in \mathbb{N}$ *et* $h_t = (i_1, j_1, \ldots, i_t, j_t) \in (I \times J)^t$*, on définit l'a posteriori du joueur* 2 *après* h_t *comme :*

$$p_t(\sigma, \tau, h_t) = (p_t^k(\sigma, \tau, h_t))_{k\in K} \in \Delta(K)$$

avec $p_t^k(\sigma, \tau, h_t) = P_{p,\sigma,\tau}(\tilde{k} = k | h_t)$ *pour tout* k*.* $p_t(\sigma, \tau, h_t)$ *est la croyance du joueur* 2 *sur l'état de la nature à la fin de l'étape* t *si* h_t *a été précédemment joué et que le joueur* 1 *utilise* σ*.*

Proposition. *Par rapport à* $\mathbb{P}_{p,\sigma,\tau}$ *, la suite* $(p_t(\sigma))t \geq 0$ *est une* $(\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$*-martingale à valeurs dans* $\Delta(K)$*.*

Théorème (Aumann et Maschler)**.** *Le jeu* $\Gamma_\infty(p)$ *a une valeur qui vaut* $\text{cav}u(p)$*.*

Théorème (Formule de récurrence)**.**

$$v_{T+1}(p) = \frac{1}{T+1} \max_{x\in\Delta(I)^K} \min_{y\in\Delta(J)} \left(G(p, x, y) + T \sum_{i\in I} x(p)(i) v_T(\hat{p}(x, i))\right)$$

Avec :

1. $x = (x^k(i))_{i\in I,k\in K}$*, avec* x^k *la probabilité utilisée par* J_1 *à l'étape* 1 *si l'état est* k
2. $y = (y(j))_{j\in J}$ *est la probabilité utilisée par* J_2 *à l'étape* 1
3. $G(p, x, y) = \sum_k p^k G^k(x_k, y)$ *est le paiement espéré d'étape* 1
4. $x(p)(i) = \sum_{k\in K} p^k x^k(i)$ *est la probabilité que* i *soit jouée en date* 1
5. $\hat{p}(x, i)$ *est la probabilité conditionnelle sur* K *sachant* i*.*

---

http ://ausset.me/cheatsheets