Théorie des jeux

Jeux sous forme normale

Deux joueurs a somme nulle

Modèle

Définition. *Jeu $\Gamma = (A, B, g)$*

- *A actions de J_1*
- *B actions de J_2*
- *$g : A \times B \to \mathbb{R}$ fonction que J_1 maximise et J_2 minimise*

Valeur en stratégies pures

Définition (sup inf et inf sup)**.** *Le* sup inf *en stratégies pures du jeu Γ, noté $\underline{v}(\Gamma)$ (ou simplement $\underline{v}$) est :*

$$\underline{v} = \sup_{a\in A}\left(\inf_{b\in B} g(a,b)\right)$$

C'est le paiement maximal que J_1 peut s'assurer quelque soit l'action de J_2.
*L'*inf sup *en stratégies pures du jeu Γ, noté $\bar{v}(\Gamma)$ (ou simplement $\bar{v}$) est :*

$$\bar{v} = \inf_{b\in B}\left(\sup_{a\in A} g(a,b)\right)$$

*L'*inf sup *représente le paiement minimal que J_2 peut assurer quelque soit l'action de J_1.*

Proposition (Caractérisation)**.** *$\underline{v}$ est caractérisé par :*

$$\begin{cases} \text{"}J_1 \text{ garantit } \underline{v} \text{ à } \varepsilon \text{ près" : } \forall\varepsilon>0, \exists a\in A, \forall b\in B, g(a,b)\geq \underline{v}-\varepsilon \\ \text{"}J_2 \text{ défend } \underline{v} \text{ à } \varepsilon \text{ près" : } \forall\varepsilon>0, \forall a\in A, \exists b\in B, g(a,b)\leq \underline{v}+\varepsilon \end{cases}$$

$\bar{v}$ est caractérisé par :

$$\begin{cases} \text{"}J_2 \text{ garantit } \bar{v} \text{ à } \varepsilon \text{ près" : } \forall\varepsilon>0, \exists b\in B, \forall a\in A, g(a,b)\leq \bar{v}+\varepsilon \\ \text{"}J_1 \text{ défend } \bar{v} \text{ à } \varepsilon \text{ près" : } \forall\varepsilon>0, \forall b\in B, \exists a\in A, g(a,b)\geq \bar{v}-\varepsilon \end{cases}$$

Définition (Valeur)**.** *Si $\bar{v} \leq \underline{v}$, on dit que le jeu a une valeur v en stratégies pures, avec $v = \bar{v} \leq \underline{v}$.*

Théorème (Sion)**.** *Soit $\Gamma = (A, B, g)$ un jeu à somme nulle, on suppose que*

- *A et B sont des compacts convexes non vides.*
- *Pour tout $b \in B$, la fonction $a \to g(a, b)$ est concave semi continue supérieurement.*
- *Pour tout $a \in A$, la fonction $b \to g(a, b)$ est convexe semi continue inférieurement.*

Alors le jeu Γ a une valeur en stratégies pures et chaque joueur a des stratégies optimales.

Théorème (Minimax, von Neumann)**.** *Tout jeu fini a une valeur en stratégies mixtes.*

Proposition (Propriétés des stratégies)**.** *Les propriétés suivantes sont vraies.*

1. *Tout jeu fini admet un point selle (en stratégies mixtes) : $\exists(x^*, y^*) \in X \times Y$ tel que $g(x, y^*) \leq g(x^*, y^*) \leq g(x^*, y)\forall x \in X, \forall y \in Y$.*
2. *Tout point selle vérifie $g(x^*, y^*) = V$.*
3. *(x^*, y^*) est un point selle si et seulement si $g(a, y^*) \leq g(x^*, y^*) \leq g(x^*, b)\forall a \in A, \forall b \in B$.*
4. *Si (x^*, y^*) est un couple de stratégies optimales, et si $x^*_i > 0$, alors $g(a_i, y^*) = V$.*
5. *Si (x^*, y^*) est un couple de stratégies optimales, et si $x^*_i > 0$ et $x^*_j > 0$, alors $g(a_i, y^*) = g(a_j, y^*)$*

Proposition (Elimination mixte)**.** *Supposons la stratégie pure $a_i \in A$ dominée strictement par la stratégie mixte $\tilde{x} \in X$:*

$$g(a_i, y) < g(\tilde{x}, y)\forall y \in Y$$

Alors le jeu Γ et le jeu $\Gamma' = (A\backslash a_i, B, g)$ dans lequel on a éliminé l'action pure a_i ont la même valeur en stratégies mixtes, et les mêmes stratégies optimales.

Jeux à n joueurs

Modèle

Formellement, un jeu sous forme normale $\Gamma = \left(N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N}\right)$ est la donnée

- d'un ensemble de joueurs N, que l'on supposera toujours fini. Par abus de notation on notera également N son cardinal.
- de N ensembles non vides A^i, A^i étant l'ensembles d'actions du joueur i.
- de N fonctions bornées $g^i : \Pi_{j\in N} A^j \to R$, g^i étant la fonction de paiement du joueur i.

Equilibres en stratégies dominantes

Définition. *La stratégie $a^i \in A^i$ est une meilleure réponse du joueur i au profil de stratégie des autres joueurs $a^{-i} \in A^{-i}$ si pour toute autre stratégie $b^i \in A^i, g^i(b^i, a^{-i}) \leq g^i(a^i, a^{-i})$, c'est à dire si*

$$g^i(a^i, a^{-i}) = \max_{b^i\in A^i} g^i(b^i, a^{-i})$$

Définition (Stratégie dominante)**.** *La stratégie $a^i \in A^i$ est dominante si $g^i(b^i, b^{-i}) \leq g^i(a^i, b^{-i})$ pour tout profil de stratégies $b \in A$. Un équilibre en stratégies dominantes est un profil d'action $a \in A$ tel que pour tout joueur i, a^i est dominante.*

Equilibres de Nash

Définition (Equilibre de Nash)**.** *Un équilibre de Nash (en stratégies pures) est un profil d'actions $a \in A$ tel que pour tout joueur i, l'action a^i soit une meilleure réponse au profil a^{-i} :*

$$\forall i, \forall bi \in A^i, g^i(a^i, a^{-i}) \geq g^i(b^i, a^{-i})$$

Théorème (Glicksberg-Nash)**.** *Soit $\Gamma = \left(N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N}\right)$ un jeu tel que pour chaque joueur i,*

- *A_i est un sous ensemble convexe et compact d'un espace euclidien.*
- *La fonction de paiement g^i est continue.*
- *Pour tout profil $a^{-i} \in A^{-i}$, la fonction $a^i \to g^i(a^i, a^{-i})$ est concave.*

Alors Γ possède un équilibre de Nash en stratégies pures.

Sous Forme extensive

Théorème (Zermelo-Kuhn)**.** *Tout jeu à information parfaite fini admet un équilibre de Nash en stratégies pures. En particulier, si le jeu est à somme nulle, le jeu a une valeur et les deux joueurs ont des stratégies optimales.*

Jeux répétés

Information complete

Modèle

Définition. *La forme stratégique du jeu répété T fois Γ_T est donnée par :*

$$(N, (S^i)_{i\in N}, \gamma^i_T)$$

avec $\gamma^i_T(s) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_s}\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^T g^{i,k_t}(a_t)\right]$.
La forme stratégique du jeu Γ est donnée par :

$$(N, (S^i)_{i\in N}, \gamma^i_\lambda)$$

avec $\gamma^i_\lambda(\sigma) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\sigma}\left[\sum_{t\geq 1}\lambda(1-\lambda)^{t-1} g^{i,k_t}(a^t)\right]$

Théorème. *Pour tout entier T et tout $\lambda \in]0, 1]$, les jeux Γ_T et Γ_λ admettent des équilibres de Nash en stratégies de comportement. En particulier, dans le cas de jeu à somme nulle, Γ_T et Γ_λ ont chacun une valeur et les deux joueurs ont des stratégies optimales.*

Définition. *Soit Γ_∞ un jeu infiniment répété à somme nulle, notons $g = g^1 = -g^2$.*

- *Le joueur 1 garantit uniformément le paiement $d \in R$ si :*

  $$\forall\varepsilon > 0, \exists\sigma^1 \in \Sigma^1, \exists T_0, \forall\sigma^2 \in \Sigma^2, \forall T \geq T_0, \gamma_T(\sigma^1, \sigma^2) \geq d-\varepsilon$$

- *Le joueur 2 défend uniformément le paiement $d \in R$ si :*

  $$\forall\varepsilon > 0, \forall\sigma^1 \in \Sigma^1, \exists\sigma^2 \in \Sigma^2, \exists T_0, \forall T \geq T_0, \gamma^T(\sigma^1, \sigma^2) \leq d+\varepsilon$$

- *Le* max min *uniforme $\underline{v}$ de Γ_∞, s'il existe, est tel que le joueur 1 garantit uniformément $\underline{v}$ et le joueur 2 défend uniformément $\underline{v}$. On définit le* min max *uniforme $\bar{v}$ en échangeant les rôles des joueurs.*

- *Le jeu Γ_∞ a une valeur v si $v = \underline{v} = \bar{v}$.*

- *Lorsque le jeu a une valeur, une stratégie σ^1 du joueur 1 sera dite optimale si elle vérifie :*

  $$\forall\varepsilon > 0, \exists T_0, \forall\sigma^2 \in \Sigma^2, \forall T \geq T_0, \gamma_T(\sigma^1, \sigma^2) \geq v-\varepsilon$$

  On définit similairement les stratégies optimales du joueur 2.

Définition (Ensemble des paiements réalisables)**.** *On appelle ensemble réalisable l'enveloppe concave* conv$g(A)$ *des vecteurs* $g(a)$, $a \in A$. *Pour chaque joueur* i, *posons*

$$v^i = \min_{a^{-i} \in \prod_{j \neq i} \Delta(A^j)} \max_{a^i \in A^i} g^i(a^i, a^{-i})$$

$$IR = \left\{x \in \mathbb{R}^n | \forall i \in \mathbb{N}, x^i \geq v^i\right\}$$

La quantité v^i *s'appelle niveau de rationalité individuelle ou niveau* min max *du joueur* i : v^i *est le plus petit paiement que le joueur* i *peut obtenir dans le jeu* G *en jouant une meilleure réponse contre un profil de stratégies mixtes de ses adversaires. C'est aussi le plus petit paiement que les joueurs* $-i$ *peuvent garantir s'ils jouent dans le but de minimiser le paiement du joueur* i. *Posons enfin* $E = \text{conv}g(A) \cap IR$.

Lemme (Folk Theorem)**.**

$$E_\infty = E$$

Théorème. *Supposons que pour tout joueur* i, *il existe* $e(i) \in E_1$ *tel que* $e^i(i) > v^i$. *Alors* $E_T \to E$.

Théorème (Sorin)**.** *Si le jeu est à deux joueurs ou qu'il existe* $x \in E$ *tel que* $x^i > v^i$ *pour tout* i, *alors* $E_\lambda \underset{\lambda \to 0}{\to} E$.

Théorème (Sous-jeu parfait)**.** *On note* E'_∞ *l'ensemble des paiements d'équilibre sous-jeu parfaits de* Γ_∞.

$$E'_\infty = E_\infty = E$$

Théorème (Benoit et Krishna)**.** *Supposons que pour tout* i, *il existe* $e(i), f(i) \in E_1$ *tels que* $e^i(i) > f^i(i)$. *Alors* $E'_T \to E$.

Théorème (Fudenberg et Maskin)**.** *Si* E *est d'intérieur non vide alors,* $E'_\lambda \underset{\lambda \to 0}{\to} E$.

Information incomplète

Modèle

On a une famille $(G^k)_{k \in K}$ de jeux matriciels de même taille $I \times J$, et une probabilité p sur K. Le jeu $\Gamma_\infty(p)$ est joué ainsi :

- initialement, un état de la nature k est tiré, une fois pour toutes, selon p. J_1 apprend k, pas J_2.
- à chaque étape $t = 1, 2, \ldots$, simultanément J_1 choisit une action i_t dans I et J_2 choisit une action j_t dans J. Le paiement d'étape de J_1 est alors $G_1^k(i_t, j_t)$, celui de J_2 est $G_2^k(i_t, j_t)$, mais tout ce que les joueurs apprennent avant de passer à l'étape $t + 1$ est le couple (i_t, j_t).
- Une stratégie de J_1 est un élément $\sigma = (\sigma_t)_{t \geq 1}$, avec $\sigma_t : K \times (I \times J)^{t-1} \to \Delta(I)$ pour tout t.
- Une stratégie de J_2 est un élément $\tau = (\tau_t)_{t \geq 1}$, avec $\tau_t : K \times (I \times J)^{t-1} \to \Delta(J)$ pour tout t.
- On note respectivement Σ et $\mathcal{T}$ les ensembles de stratégies des joueurs 1 et 2.

Éclatement et concavification

$p = (p^k)_{k \in K}$ est la probabilité initiale, ou l'a priori de J_2 sur l'état de la nature. J_1 choisit sa première action s, en fonction de l'état de la nature k sélectionné. Notons $x = (x^k)_{k \in K} \in \Delta(S)^K$ la probabilité de transition utilisée : si l'état est k, le joueur 1 choisit le signal s avec probabilité $x^k(s)$. La probabilité totale que s arrive est notée : $\lambda_s = \sum_{k \in K} p^k x^k(s)$, et si $\lambda_s > 0$ la probabilité conditionnelle sur K (ou a posteriori) sachant s vaut : $\hat{p}(x, s) = \left(\frac{p^k x^k(s)}{\lambda_s}\right)_{k \in K}$

Lemme (Splitting)**.** *Supposons que* $p = \sum_{s \in S} \lambda_s p_s$, *avec* S *fini, pour tout* $s \in S$, $\lambda_s > 0$, $p_s \in \Delta(K)$, *et* $\sum_{s \in S} \lambda_s = 1$. *Alors il existe une probabilité de transition* $x \in \Delta(S)^K$ *telle que :*

$$\forall s \in S, \lambda_s = \sum_{k \in K} p^k x^k(s) \text{ et } \hat{p}(x, s) = p_s$$

Lemme. *Si le joueur* 1 *garantit* f, *alors le joueur* 1 *garantit* cav$f$ *avec :*

$$\text{cav}f(p) = max\{\sum_{s \in S} \lambda_s f(p_s) | S \text{ fini}, \forall s \in S \lambda_s \geq 0, p_s \in \Delta(K), \sum_{s \in S} \lambda_s = 1, \sum_{s \in S} \lambda_s p_s = p\}$$

Corollaire. *Notons, pour toute probabilité* p *dans* $\Delta(K)$, $u(p)$ *la valeur du jeu matriciel* $G(p) = \sum_{k \in K} p^k G^k$ *non révélateur. Alors le joueur* 1 *garantit* cav$u$

Définition. *Pour* p *dans* $\Delta(K)$, *on pose* $v^*(p) = \inf_{T \geq 1} v_T(p)$. v^* *est concave et* M*-Lipschitz avec*

$$M = \max\left\{|G^k(i, j)| | k \in K, i \in I, j \in J\right\}$$

Lemme. *La suite de fonctions* $(v_T)_T$ *converge uniformément sur* $\Delta(K)$ *vers* v^*, *et le joueur* 2 *garantit* v^* *dans le jeu infiniment répété.*

Martingale des a posteriori

Définition. *Soit* $(\sigma, \tau) \in \Sigma \times T$ *un profil de stratégies dans* $\Gamma_\infty(p)$. *Pour* $t \in \mathbb{N}$ *et* $h_t = (i_1, j_1, \ldots, i_t, j_t) \in (I \times J)^t$, *on définit l'a posteriori du joueur* 2 *après* h_t *comme :*

$$p_t(\sigma, \tau, h_t) = (p_t^k(\sigma, \tau, h_t))_{k \in K} \in \Delta(K)$$

avec $p_t^k(\sigma, \tau, h_t) = P_{p, \sigma, \tau}(\tilde{k} = k | h_t)$ *pour tout* k. $p_t(\sigma, \tau, h_t)$ *est la croyance du joueur* 2 *sur l'état de la nature à la fin de l'étape* t *si* h_t *a été précédemment joué et que le joueur* 1 *utilise* σ.

Proposition. *Par rapport à* $\mathbb{P}_{p, \sigma, \tau}$, *la suite* $(p_t(\sigma))t \geq 0$ *est une* $(\mathcal{H}_t)_{t \geq 0}$*-martingale à valeurs dans* $\Delta(K)$.

Théorème (Aumann et Maschler)**.** *Le jeu* $\Gamma_\infty(p)$ *a une valeur qui vaut* cav$u(p)$.

Théorème (Formule de récurrence)**.**

$$v_{T+1}(p) = \frac{1}{T+1} \max_{x \in \Delta(I)^K} \min_{y \in \Delta(J)} \left(G(p, x, y) + T \sum_{i \in I} x(p)(i) v_T(\hat{p}(x, i))\right)$$

Avec :

1. $x = (x^k(i))_{i \in I, k \in K}$, *avec* x^k *la probabilité utilisée par* J_1 *à l'étape* 1 *si l'état est* k
2. $y = (y(j))_{j \in J}$ *est la probabilité utilisée par* J_2 *à l'étape* 1
3. $G(p, x, y) = \sum_k p^k G^k(x_k, y)$ *est le paiement espéré d'étape* 1
4. $x(p)(i) = \sum_{k \in K} p^k x^k(i)$ *est la probabilité que* i *soit jouée en date* 1
5. $\hat{p}(x, i)$ *est la probabilité conditionnelle sur* K *sachant* i.
