

Analyse Convexe

Ensembles convexes

Définition. *A sous-espace affine si*
 $(1-t)x + ty \in A, \forall x, y \in A, \forall t \in \mathbb{R}$

*A stable par combinaison affine : $\forall x_1, \dots, x_m \in A, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_m$
tels que $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ on a $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in A$*

Définition. *A convexe : pareil avec $t \in [0, 1]$ et $\forall i, \lambda_i > 0$*

Lemme. *Soient $a, b > 0$ et K convexe. Alors*
 $aK + bK = (a+b)K$

Définition. *Soit F sous-espace affine, $x \in F$. On a*
 $\dim(F) = \dim(F-x)$

Définition. *On appelle simplexe de dimension n l'enveloppe convexe de $n+1$ points.*

Lemme. *Soit K un convexe de dimension n alors in contient un simplexe de dimension $n+1$*

Théorème de Carathéodory et de Helly

Théorème (Théorème de Carathéodory). *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Toute combinaison convexe d'éléments de A peut s'écrire comme combinaison d'au plus $n+1$ éléments de A .*

Théorème (Théorème de Radon). *Soit $S \subset \mathbb{R}^n, |S| \geq n+2$, il existe A et B verifiant :*

$A \cap B = \emptyset$ et $\text{conv}(A) \cap \text{conv}(B) \neq \emptyset$

Théorème (Théorème de Helly). *Si une famille de sous-ensembles convexes de \mathbb{R}^n est telle que toute sous-famille de cardinal $n+1$ est d'intersection non vide alors la famille entière est d'intersection non vide.*

Propriétés topologiques des convexes

Proposition. *Si K convexe alors $\overset{\circ}{K}$ et \bar{K} sont convexes.*

Définition. $\text{ri}(K) = \{x \in U, U \text{ ouvert et } U \cap \text{aff}(K) \subset K\}$

Lemme. *L'interieur relatif d'un convexe est convexe.*

Proposition. *Soit $K \neq \emptyset$ convexe de \mathbb{R}^n , alors $\text{ri}(K) \neq \emptyset$*

Définition. *Soit K convexe. On appelle jauge de K :*
 $j(x) = \inf\{s > 0; x \in sK\}$

Proposition. *Soit K convexe contenant 0 et j sa jauge.*

- $j(tx) = tj(x); \forall t \geq 0$
- $j(x+y) \leq j(x) + j(y)$

Proposition. *Soit K convexe tel que $0 \in \overset{\circ}{K}$ et j sa jauge. Alors $j(x) < \infty$ et j continue sur E .*

Proposition. *Soit K convexe contenant 0.*
 $\bar{K} \subset \{j < 1\} \subset K \subset \{j \leq 1\} \subset \bar{K}$

Proposition. *Si K convexe, $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset, -K = K$ et K ne contient pas de demi-droite alors j est une norme. Et \bar{K} la boule unité de j .*

Fonctions convexes

Proposition. *1. f convexe \implies*
 $\text{dom}(f) = \{x \in K; f(x) < \infty\}$ convexe

2. f convexe $\Leftrightarrow \text{epi}(f) = \{(x, t) \in \text{dom}(f) \times \mathbb{R}; f(x) \leq t\}$ convexe

Lemme. *Si f convexe majorée au voisinage de $x \in E$ alors f continue en x .*

Lemme. *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe. Alors f localement bornée sur son domaine.*

Corollaire. *En dimension finie, une fonction convexe est continue dans l'intérieur de son domaine.*

Théorème de Hahn-Banach

Théorème (Théorème de Hahn-Banach). *Soit E un espace vectoriel, $j : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 1-homogène et sous-additive. Soit F un s.e.v de E et $\phi : F \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :*
 $\phi(x) \leq j(x), \forall x \in F$ alors $\exists \psi : F \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\psi(x) = \phi(x), \forall x \in F$$

$$\psi(x) \leq \phi(x), \forall x \in E$$

Corollaire. *Soit E un espace vectoriel normé, F un sous-espace et ϕ une forme linéaire continue sur F . Alors ϕ s'étend en une forme linéaire continue sur E de même norme que ϕ .*

Corollaire. *Soit E e.v.n, $x \in E$ fixé, il existe $\phi \in E^*$ de norme 1 telle que $\phi(x) = \|x\|$*

Théorème. *Soit E un espace vectoriel topologique, A, B deux ensembles convexes disjoints.*

- Si A ouvert, $\exists \phi \in E^*$ telle que*
 $\phi(x) < \phi(y), \forall x \in A, \forall y \in B$
- Si E localement convexe, A compact, B fermé, alors*
 $\exists \phi \in E^*$ et $\epsilon > 0$ tels que
 $\phi(x) + \epsilon < \phi(y), \forall x \in A, \forall y \in B$

Corollaire (Hyperplan d'appui). *Soit C un convexe fermé d'intérieur non vide et $x \in \delta C$. Alors C admet un hyperplan d'appui en $x : \exists \phi \in E^*$ non nulle telle que $\phi(y) \leq \phi(x), \forall y \in C$*

Polarité

Définition. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On appelle polaire de A ,*
 $A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle \leq 1, \forall y \in A\}$

Lemme. *L'ensemble A° est convexe, fermé et contient 0.*

Théorème. $A = A^{\circ\circ} \Leftrightarrow A$ est convexe, fermé et contient 0.

Définition. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On appelle fonction d'appui de A :*
 $h_K(y) = \sup_{x \in A} \langle x, y \rangle$

Lemme. $0 \in A \implies h_A = j_{A^\circ}$

Proposition. *Soit K un convexe compact d'intérieur non vide (K corps convexe) tel que $K = -K$. Soit j_K sa jauge. Alors $E = (\mathbb{R}^n, j_K)$ espace vectoriel normé dont la boule unité est K et $E^* = (\mathbb{R}^n, j_{K^\circ})$ i.e la boule unité de E^* est le polaire de K .*

Transformée de Legendre-Fenchel

Définition. *f est dite semi-continue inférieurement si pour toute suite convergente (x_n) de \mathbb{R}^n on :*
 $\liminf f(x_n) \geq f(\lim x_n)$

Lemme. f s.c.i $\Leftrightarrow \text{epi}(f)$ sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

Lemme. *Un sup de fonctions s.c.i est s.c.i*

Définition (Transformée de Legendre-Fenchel). *Soit f une fonction propre.*

$$f^* : y \in \mathbb{R}^n \rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, y \rangle - f(x)\}$$

Lemme. f^* est convexe et s.c.i

Définition. *Soit f une fonction propre et $x \in \text{dom}(f)$. On dit que y est sous-gradient de f en $x, y \in \delta f(x)$ si :*
 $\langle x', y \rangle - f(x') \leq \langle x, y \rangle - f(x), \forall x' \in \mathbb{R}^n$
i.e $f(x) + f^*(y) = \langle x, y \rangle$

Théorème. f convexe propre, $x \in \text{ri}(\text{dom}(f)) \implies \delta f(x) \neq \emptyset$

Corollaire. f fonction convexe propre $\implies f$ minorée par une fonction affine.

Théorème. *Soit f fonction propre, minorée par une fonction affine. Alors $\text{epi}(f^{**}) = \text{conv}(\text{epi}(f))$*

Corollaire. *Soit f fonction propre.*
 $f = f^{**} \Leftrightarrow f$ convexe et s.c.i.

Proposition. *Si f est convexe s.c.i, l'image du domaine de f par δf contient l'intérieur du domaine de f^{**} i.e.*
 $\text{dom}(f^{**}) \subset \delta f(\text{dom} f)$.

Convexité et différentiabilité

Définition. Soit f fonction définie au voisinage de x et soit $v \in \mathbb{R}^n$. On dit que f admet une dérivée directionnelle en s dans la direction v , notée $f'(x, v)$ si :

$$f'(x, v) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

Définition. f Gâteaux-différentiable en s si elle admet des dérivées dans toutes les directions et si il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall v, f'(x, v) = \langle \nabla f(x), v \rangle$ et on pose $f'(x) = y$.

Lemme. Soit f une fonction convexe et $x \in \text{dom}(f)$. Alors pour toute direction v , la dérivée directionnelle $f'(x, v)$ existe, et il existe $y \in \text{df}(x)$ telle que $f'(x, v) = \langle y, v \rangle$.

Proposition. Soit U un ouvert convexe de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction Gâteaux-différentiable sur U . Il y a équivalence entre :

1. f est convexe sur U
2. $f(y) \geq f(x) + \langle f'(x), y - x \rangle, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
3. $\langle f'(y) - f'(x), y - x \rangle \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Corollaire. Si f est deux fois différentiable sur U et si $D^2 f(x) \geq 0$ en tout point de U alors f est convexe.

Lemme. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et soit x dans l'intérieur du domaine de f . Si f est Gâteaux-différentiable en x alors f est différentiable et $f'(x) = \nabla f(x)$

Proposition. Soit f convexe et soit x dans l'intérieur du domaine de f . Alors f est différentiable en x ssi $\partial f(x)$ est un singleton et on a :

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$$

Théorème de Krein-Milman

Définition. Soit K un ensemble convexe de E . On dit que $F \subset K$ est une face de K si F est convexe et si :

$$\frac{x+y}{2} \in F \implies x, y \in F \forall x, y \in K$$

Lemme. Soit K un convexe et soit ϕ une forme linéaire atteignant son maximum sur K . Alors l'ensemble

$$F = \left\{ x \in K; \phi(x) = \max_K \phi \right\}$$

est une face de K .

Proposition. Soit K un convexe compact non vide, alors K possède au moins un point extrémal.

Théorème (Krein-Milman). Soit K un ensemble convexe compact de E alors K est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.

Optimisation Convexe

minimiser $f(x)$ convexe
 sous contraintes $g_i(x) \leq 0, \forall i \leq k$ convexe
 $h_i(x) = 0 \forall i \leq l$ affines.

Définition. Le Lagrangien associé au problème \mathcal{P} est la fonction :

$$L : (x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \rightarrow f(x) + \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^l \mu_i h_i(x)$$

$$\lambda_i \geq 0$$

Proposition. Soient $(x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$, x solution de \mathcal{P} et (λ, μ) vecteur KKT ssi x vérifie les contraintes et les conditions :

$$\lambda_i g_i(x) = 0, \forall i \leq k$$

$$0 \in \partial \left(f + \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^l \mu_i h_i(x) \right)$$

Théorème. On suppose que la valeur du problème n'est pas $-\infty$ et que la condition dite de Slater est vérifiée : $\exists x \in \text{ri}(C)$ vérifiant les contraintes et vérifiant de plus :

$$g_i(x) < 0$$

pour tout i tel que la fonction g_i ne soit pas affine sur C . Alors le problème admet un vecteur KKT.

Lemme. Soit K convexe et C un cône convexe engendré par un nombre fini de vecteurs. Si C ne rencontre pas l'intérieur relatif de K , il existe $y \in C^*$

$$\langle x, y \rangle \leq 0, \forall x \in K$$

et tel que l'inégalité soit stricte pour au moins un élément de K .

Corollaire. On suppose que le problème vérifie les hypothèses du théorème précédent. Alors x est solution de (\mathcal{P}) ssi $\exists(\lambda, \mu)$ tel que x vérifie les contraintes et les conditions de KKT.

Théorème de John

On dit que $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ est un ellipsoïde si $\exists A$ inversible et u tels que :

$$\mathcal{E} = A^{-1}(B_2^n) + u$$

Lemme. La fonction

$$A \in S_n \rightarrow \begin{cases} -\log \det(A) & \text{si } A \in S_n^{++} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème. Soit K un convexe compact d'intérieur non vide. Il existe une unique ellipsoïde contenu dans K de volume maximal, appelé ellipsoïde de John de K .

Théorème. Un convexe compact d'intérieur non vide K est en position de John ssi K est contenu dans B_2^n et si il existe r entier, c_1, \dots, c_r des réels positifs et x_1, \dots, x_r appartenant à $\partial K \cap S^{n-1}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^r c_i x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^r c_i x_i (x_i)^\top = \text{id}$$

Corollaire. Soit \mathcal{E} l'ellipsoïde de John de K et u son centre alors

$$\frac{1}{n}(\mathcal{E} - u) + u \subset K$$

Si K est symétrique par rapport à u on a même

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathcal{E} - u) + u \subset K$$

Espaces en dualité et programmation linéaire

Définition. On dit que E et F espaces vectoriels sont en dualité s'il existe une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$$

qui soit une forme bilinéaire non dégénérée.

Définition. Soit E, F deux espaces en dualité. Soit $\sigma(E, F)$ la plus petite topologie sur E telle que pour tout y l'application $x \rightarrow \langle x, y \rangle$ soit continue. Alors E muni de cette topologie est un espace vectoriel topologique localement convexe.

Théorème. Soit ϕ une forme linéaire sur E . Alors ϕ est continue pour la topologie $\sigma(E, F)$ ssi il existe $y \in E$ tel que

$$\phi(x) = \langle x, y \rangle$$

Définition. Soit C un cône de E . On pose

$$C^* = \{y \in F; \langle x, y \rangle \geq 0, \forall x \in C\}$$

C^* est un cône fermé de F appelé cône dual. De même si D est un cône de F , le cône dual de D est :

$$D_* = \{x \in E; \langle x, y \rangle \geq 0, \forall y \in D\}$$

Théorème. Soit $C \subset E$. On a $C = (C^*)_*$ ssi C est un cône fermé. Plus généralement $(C^*)_*$ est l'enveloppe conique fermée de C .

Théorème. Si l'ensemble des x satisfaisant les contraintes de :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & \langle x, y \rangle \\ \text{sous contraintes} & Ax = a \\ & x \in C \text{ cône.} \end{array}$$

est non vide et si le cône $D = \{(Ax, \langle x, y \rangle); x \in C\}$ est fermé dans $E_1 \times \mathbb{R}$ muni de la topologie produit alors $\alpha = \alpha'$. Si de plus $\alpha > -\infty$ le problème admet une solution.

Théorème (Théorème de Kantorovitch). Les deux problèmes ont la même valeur :

$$\inf \left\{ \int c \, d\pi; \pi_1 = \mu, \pi_2 = \nu \right\}$$

$$\dots = \sup \left\{ \int f \, d\mu + \int g \, d\nu, f(x) + g(y) \leq c(x, y) \right\}$$